Неопределен интеграл

Диференцирането е централна конструкция в анализа с множество приложения - логично е да попитаме има ли обратна процедура и как би следвало да се работи с нея. С други думи, ако имаме производната на някоя диференцируема функция $f(x) = \Phi'(x)$, как да намерим самата функция (*примитивната* на f). Ясно е най-напред, че тъй като $(\Phi + C)' = \Phi' = f\ \forall C \in \mathbb{R}$, тази примитивна е определена *с точност до адитивна константа*. Множеството от всички решения (за различни стойности на C) наричаме *неопределен интеграл* от f и означаваме с

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(x) + C. \tag{0.1}$$

Така табличните производни съответстват на таблични интеграли, например[1]

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$$

Причината за модула в последния израз е, че интегралът е дефиниран както за положителни, така и за отрицателни x: смяната на знака в числителя и знаменателя се съкращава и примитивната е четна функция. Тук ползваме свойството

$$\int f\,\mathrm{d}\lambda x = \int \lambda f\,\mathrm{d}x = \lambda \int f\,\mathrm{d}x, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{0.2}$$

като обръщаме внимание, че само константите се радват на такава мобилност по отношение на интегрирането - всички останали функции, както ще видим, спазват строги правила на движение. Друго почти очевидно свойство е линейността

$$\int (f + \lambda g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x + = \lambda \int g\,\mathrm{d}x, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{0.3}$$

която следва от линейността при диференцирането. С нейна помощ например лесно интегрираме полиноми като ползваме първия табличен интеграла по-горе:

$$\int (3x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x = x^3 - x^2 + x + C.$$

Интегрирането може да бъде разгледано и като процедура за внасяне на подинтегралната функция под знака на диференциала, тъй като $\Phi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\Phi(x)$. Съответно при смяна на промеливата $x = x(t)$ имаме $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$, т.е. при преминаване през знака d отляво-надясно функцията се интегрира (превръща се в примитивната си), а отдясно-наляво се диференцира (заменя се от производната си). При тази интерпретация целта на "играта" е да стигнем до ситуация, в която нищо не застава между знака за интегриране и диференциала, при което те анихилират (взаимно се съкращават), като се ражда неопределена константа

$$\int \mathrm{d}\Phi = \Phi + C.$$

[1] проверете верността на тези формули и допълнете списъка с производните, които знаете.

Основни техники на интегриране

Най-простата техника на интегриране използва представянето на производната като диференчно частно и е известна като "внасяне под знака на диференциала"

$$\int f(x)y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}y(x). \tag{0.4}$$

Идеята при нея е да се представи f като функция на y с цел евентуално опростяване на интеграла. Ще разгледаме един пример, които илюстрира това добре:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}\,e^x}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C.$$

Тук използваме, че $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}e^x = \mathrm{d}(e^x+1)$, тъй като $(f+C)' = f'$ и следователно

$$\mathrm{d}(f+C) = \mathrm{d}f$$

за всяка константа C. Тогава полагането $t = 1+e^x$ свежда интеграла до табличен, а именно $\ln|t|+C$, но пропускаме модула понеже имаме очевидно $1+e^x > 0$.

Следващата техника за интегриране идва директно от правилото на Лайбниц

$$\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\,\mathrm{d}f$$

което сме написали в диференциален вид за да интегрираме и така да получим

$$\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x). \tag{0.5}$$

Горното тъждество е известно като формула за *интегриране по части* и се оказва много полезно, дори в някои на пръв поглед безнадеждни ситуации. Обръщаме внимание, че пропускаме константата при интегрирането на $\mathrm{d}(fg)$ тъй като тя ще се появи така или иначе в следващия интеграл. Много често (0.5) се прилага в комбинация с (0.4), например когато под интеграла имаме произведение на полином с експонента, синус или косинус, първо внасяме трансцедентната функция под знака на диференциала и едва след това интегрираме по части:

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\sin x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$

При полином от по-висока степен тази процедура се повтаря няколко пъти, като на всеки цикъл степента пада с единица: $\mathrm{d}x^n = nx^{n-1}\mathrm{d}x$. В друг типичен пример

$$I = \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \int e^x\mathrm{d}\sin x = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = e^x\sin x + e^x\cos x - I$$

след двукратно прилагане на (0.5) стигаме до изходния интеграл. Така лесно изразяваме неизвестата I (като не забравяме за неопределената константа вдясно)

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Интеграли от рационални функции

При интегрирането на рационални функции съществено се използва *разлагането на прости дроби*, което припомняме накратко в следващите редове. Нека имаме

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \qquad m < n$$

и корените $\{x_k\}$ на полинома $P_n(x)$ са прости, реални. Тогава е в сила разлагането

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n} \tag{0.6}$$

където A_k са реални коефициенти, които могат да бъдат определени от горното равенство след привеждане към общ знаменател. Например $P_2 = 1 - x^2$, $Q_0 = 1$:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1+x} = \frac{A_1(1+x) + A_2(1-x)}{1-x^2} = \frac{(A_1 - A_2)z + A_1 + A_2}{1-x^2}$$

след приравняване на коефициентите пред различните степени на x в числителите от двете страни на равенството получаваме система линейни уравнения за неизвестните константи: $A_1 - A_2 = 0$, $A_1 + A_2 = 1$, която дава $A_1 = A_2 = 1/2$, т.е.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right].$$

С това разлагане можем да покажем например, че

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} + C$$

но подинтегралната функция е производна и на $\operatorname{arctanh} x$, както лесно се вижда. Всъщност, двете функции съвпадат при $|x| < 1$, което следва от представянето

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \ \in \ (-1, 1)$$

като решим за $t = e^{2x} > 0$ и след това логаритмуваме за да получим обратната функция $x = x(y)$. Довършете сами и покажете, че $\operatorname{arctanh}$ расте монотонно в $\mathbb{R}$.

Да разгледаме също и случая на $p-$кратен корен x_k, който участва в разлагането на полинома P_n с множител от вида $(x - x_k)^p$. Така към (0.6) се добавя и сумата

$$\frac{B_1}{x - x_k} + \frac{B_2}{(x - x_k)^2} + \ldots + \frac{B_p}{(x - x_k)^p} \tag{0.7}$$

съответстваща само на корена x_k. Ако вземем например $Q = x^2 + 1$ и $P = x^3 - x^2 - x + 1$, то $x_1 = 1$ очевидно ще е корен на знаменателя, тъй като сумата от коефициентите е нула. Тогава с групиране на събираемите или по схемата на Хорнер лесно получаваме $P = (x^2-1)(x-1) = (x+1)(x-1)^2$, съответно имаме

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2}$$

а неизвестните константи отново определяме с привеждане под общ знаменател

$$x^2+1 = A(x-1)^2 + B_1(x^2-1) + B_2(x+1)$$

което след приравняване на коефициентите пред степените на x дава системата

$$A + B_1 = 1, \qquad 2A - B_2 = 0, \qquad A - B_1 + B_2 = 1$$

с очевидно решение $A = B_1 = 1/2$ и $B_2 = 1$, така че в крайна сметка получаваме

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right] + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

С горното разлагане лесно решаваме следния интеграл (проверете дали е вярно)

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \ln\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + C.$$

Накрая ще разгледаме и случая на комплексни корени, когато обикновено предпочитаме да не разлагаме докрай за да избегнем комплексните коефициенти в (0.6). В место това, за всеки квадратичен множител с отрицателна дискриминнанта в разлагането на $P_n(x)$ прибавяме към (0.6) и *елементарна дроб* във вида

$$\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}, \qquad b^2-4ac<0. \tag{0.8}$$

В следващия пример се налага първо да отделим цялата част при деленето на двата полинома, след което прилагаме горната процедура за остатъка, който гарантирано е "правилна дроб" (степента на полинома в числителя е по-ниска):

$$\frac{3x^4}{x^3+1} = 3x - \frac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)} = 3x + \frac{A}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Оттук имаме $A(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1) = -3x$, което дава линейните връзки $A+C=0$, $A-C-D=3$, $A+D=0$, т.е. окончателно $A=-C=-D=1$. Тогава

$$\int \frac{3x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int 3x\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3x^2}{2} + \ln|x+1| + I_1$$

където интегралът I_1 решава с допълване до точен квадрат с $t = x - \dfrac{1}{2}$ и $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$I_1 = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+\alpha^2} + \int \frac{2\alpha^2\mathrm{d}t}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Метод на Хевисайд

Тук предлагаме и един алтернативен метод за изчисляване на коефициентите в разлагането на прости дроби, който е особено ефективен в случая на прости корени (0.6), където можем просто да умножим двете страни на равенството по $x-x_k$, след което вземаме граничен преход $x \to x_k$. Така изолираме коефициента

$$A_k = \lim_{x\to x_k}(x-x_k)R(x) \tag{0.9}$$

тъй като всички останали събираеми в (0.6) съдържат множителя $x-x_k$. След съкращаването на този множител в знаменателя, вместо граничен преход можем просто да фиксираме $x = x_k$. Същият резултат бихме получили ако диференцираме знаменателя $P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ в точката x_k, т.е. имаме

$$A_k = \frac{Q_m(x_k)}{P_n'(x_k)}. \tag{0.10}$$

Нека разгледаме и случая на $p-$кратен корен (0.7), при който за да изолираме коефициента B_m се налага да умножим с $(x-x_k)^p$, което дава полином от вида

$$(x-x_k)^p R(x) = (x-x_k)^p \sum_{j\neq k} A_j(x-x_j)^{-1} + \sum_{m=1}^{p} B_m(x-x_k)^{p-m}.$$

Диференцирайки $p-m$ пъти, елиминираме B_l събираемите при $l > m$ в горната сума, след което граничният преход $x \to x_k$ нулира частта с коефициенти A_j, както и тези B_l с индекс $l < m$, и така вдясно остава само $(p-m)!\,B_m$, или имаме

$$B_m = \frac{1}{(p-m)!}\lim_{x\to x_k}\left[(x-x_k)^p R(x)\right]^{(p-m)}. \tag{0.11}$$

Да разгледаме отново дадения по-горе пример за двоен корен в знаменателя

$$R(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2}.$$

Коефициентът A може лесно да бъде получен с помощта на (0.9) или (0.10) като

$$A = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2} = \left(\frac{x^2+1}{3x^2-2x-1}\right)_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

докато за $B_{1,2}$ умножавамес $(x-1)^2$ и диференцираме, съгласно формула (0.11)

$$B_1 = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)' = \left(\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}, \qquad B_2 = \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)_{x=1} = 1.$$

Обръщаме внимание, че както класическата рецепта, така и методът на Хевисайд работят и в случая на комплексни корени. Получете сами например разлагането

$$\frac{z+1}{z^3-z^2+z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right] = \frac{1}{z-1} - \frac{z}{z^2+1}.$$

Смяна на променливите при неопределен интеграл

Смяната на променливите $x \to t$ при функции става с полагане (*субституция*) $x = x(t)$, откъдето $f(x)$ се изразява вече като $\tilde{f}(t) = f[x(t)]$. В неопределения интеграл обаче имаме и диференциал $\mathrm{d}x$, при който също следва да се направи субституция, съгласно дефиницията на производна $\mathrm{d}x(t) = x'(t)\,\mathrm{d}t$. Например в

$$I = \int x \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

е удобно да положим $x = e^t$, откъдето $x\cos(\ln x) = e^t \cos t$ и $\mathrm{d}x = e^t \mathrm{d}t$, съответно

$$I = \int e^{2t} \cos t\,\mathrm{d}t = \int e^{2t} \mathrm{d}\sin t = e^{2t}\sin t - 2\int e^{2t} \sin t\,\mathrm{d}t = e^{2t}(\sin t + 2\cos t) - 4I$$

съгласно формулата за интегриране по части (проверете сами). Тогава лесно получаваме отговора като изразим I от горното равенство и се върнем в полагането

$$I = \frac{e^{2t}}{5}(\sin t + 2\cos t) + C = \frac{x^2}{5}[\sin(\ln x) + 2\cos(\ln x)] + C.$$

Често в интегралите имаме рационални функции с *радикали* от вида $\sqrt{\alpha^2 \pm x^2}$ или $\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ за някое $\alpha > 0$, при което е удобно да използваме тригонометрични субституции като $x = \alpha \tan t$, $x = \alpha \sin t$, или $x = \alpha \cosh t$. Например в интеграла

$$I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$$

е удобно да положим $x = 2\tan\varphi$ заради тъждеството $1 + \tan^2\varphi = \cos^{-2}\varphi$, т.е.[2]

$$I = \int (2\sin\varphi + \cos\varphi)\mathrm{d}\tan\varphi = \sin\varphi(2\tan\varphi + 1) + \int \sin\varphi(\tan\varphi - 2)\mathrm{d}\varphi = \dots$$

където ползваме отново интегриране по части. Проверете горното равенство и довършете сметките сами като после се върнете в полагането с обратната смяна

$$\varphi = \arctan\frac{x}{2}\cdot$$

Друг начин да се реши по-лесно същият интеграл е с помощта на хиперболичната субституция $x = 2\sinh t$, което дава $\sqrt{x^2+4} = 2\cosh t$ и $\mathrm{d}x = 2\cosh t\mathrm{d}t$, откъдето

$$I = \int (2\sinh t + 1)\,\mathrm{d}t = 2\cosh t + t + C = 2\cosh\left(\operatorname{arcsinh}\frac{x}{2}\right) + \operatorname{arcsinh}\frac{x}{2} + C.$$

Друго предимство при този подход е, че смяната е глобално дефинирана и обратима, тъй като функцията $\sinh t$ е монотонна и гладка върху цялата реална права, докато $\cosh t$ е положително дефинитна, така че $\sqrt{\cosh^2 t} = |\cosh t| = \cosh t$.

[2]смяната е обратима в интервал, където $\cos\varphi > 0$, затова тук считаме, че $\sqrt{\cos^2\varphi} = \cos\varphi$.

Тригонометрични субституции

При полиномите от тригонометрични функции важи едно просто правило за почленно интегриране - когато някоя от функциите $\sin x$ или $\cos x$ участва на *нечетна степен*, внасяме я под знака на диференциална и така степента ѝ в интеграла остава четна, което позволява да я изразим от другата с помощта на основното тригонометрично тъждество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и след полагане имаме рационална функция на новата променлива. Да разгледаме един лесен пример:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \tan^6 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^8 x}{\cos^4 x} \, \mathrm{d} \sin x = \int \frac{t^8 \, \mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}, \qquad t = \sin x$$

който сами можете да довършите (не забравяйте и да се върнете в полагането). От друга страна, ако всички тригонометрични функции под интеграла са на четна степен, използваме добре познатите *формули за понижаване на степента*

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}\cdot \tag{0.12}$$

Аналогично правило важи и при хиперболични функции, само че с тъждествата

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}, \qquad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}\cdot$$

Да разгледаме например следния интеграл

$$\int \sinh^2 x \cosh^4 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int (\cosh 2x - 1)(\cosh 2x + 1)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int \sinh^2 2x (\cosh 2x + 1) \, \mathrm{d}x$$

където за опростяване на израза сме използвали и трите тъждества по-горе. След разкриване на скобите получаваме два интеграла, които са от същия тип: първия решаваме с внасяне под знака на диференциала, а втория - с повторно понижаване на степента (довършете задачата сами). Обръщаме внимание, че в горния пример, както и в много други, същият резултат можем да получим като използваме и познатите *събирателни формули* при тригонометричните функции

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

и съответно, при техните хиперболични аналози

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

От тях например следва едно удобно представяне[3], което физиците често ползват

$$a \cos x + b \sin x = A \cos(x - \varphi), \qquad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

за хармонични трептения с *амплитуда* A и *фаза* φ. Илюстрираме идеята с интеграл, който след трансформация и полагане $t = \sin(x - \varphi)$ се свежда до табличен

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{3 \sin x + 4 \cos x} = \int \frac{\mathrm{dx}}{5 \cos(x - \varphi)} = \frac{1}{5} \int \frac{\mathrm{d} \sin(x - \varphi)}{1 - \sin^2(x - \varphi)}, \qquad \varphi = \arctan \frac{3}{4}\cdot$$

[3] докажете формулата по-долу и получете нейния хиперболичен аналог.

Универсална тригонометрична субституция на Ойлер

Всички полагания по-горе решаваха частни случаи на интеграли от рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$ или техните хиперболични аналози, като ги свеждат до рационални функции на новата промелнива. Съществува обаче и *универсална субституция*, която работи в общия случай (невинаги дава оптимално решение):

$$\tau = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2\tau}{1+\tau^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}\tau}{1+\tau^2}\cdot \qquad (0.13)$$

Докажете горните тъждества с помощта на представянето $(1+\tau^2)^{-1} = \cos^2\frac{x}{2}$ и обратната смяна $x = 2\arctan\tau$, и решете последния пример с полагането (0.13)!

В някои случаи функциите $\sin x$ и $\cos x$ участват само от *четна степен*. Тогава по-директно полагане се дава с (докажете и получете хиперболичните аналози!)

$$\tau = \tan x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{\tau^2}{1+\tau^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tau^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\tau}{1+\tau^2}$$

което понякога е удобно да се комбинира с (0.13). Така например при интеграла

$$\int \frac{\tan x\cos 2x\,\mathrm{dx}}{\sin^2 x - 2\cos^4 x} = \int \frac{\tau(1-\tau^2)\mathrm{d}\tau}{\tau^2(1+\tau^2)-2} = -\int \frac{\tau\mathrm{d}\tau}{\tau^2+2} = -\frac{1}{2}\ln\left(\tan^2 x + 2\right) + C$$

полагаме $\tau = \tan x$ и изразяваме $\cos 2x$ от универсалната субституция, а функциите в знаменателя - от съкратената, след което го разлагаме на множители.

Аналогично, в хиперболичния случай имаме универсалното полагане (докажете!)

$$\tau = \tanh\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sinh x = \frac{2\tau}{1-\tau^2}, \qquad \cosh x = \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}\tau}{1-\tau^2}$$

като и тук при четни степени събирателните формули ни позволяват да изразим

$$\tau = \tanh x \quad \Rightarrow \quad \sinh^2 x = \frac{\tau^2}{1-\tau^2}, \qquad \cosh^2 x = \frac{1}{1-\tau^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\tau}{1-\tau^2}\cdot$$

Нека припомним и как тригонометрията помага за освобождаване от радикали[4]

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha} = |\cos\alpha|, \qquad \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{|\cos\alpha|}, \qquad \sqrt{\cos^{-2}\alpha - 1} = |\tan\alpha|$$

както и аналогичните тъждества с хиперболини функции ($|\cosh\alpha| = \cosh\alpha \geq 1$)

$$\sqrt{1-\tanh^2\alpha} = \frac{1}{\cosh\alpha}, \qquad \sqrt{1+\sinh^2\alpha} = \cosh\alpha, \qquad \sqrt{\cosh^2\alpha - 1} = |\sinh\alpha|.$$

Например в интеграла $I = \displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ е удобно да положим $x = \sinh\alpha$, откъдето $\mathrm{d}x = \cosh\alpha\,\mathrm{d}\alpha$, $I = \displaystyle\int \sinh\alpha\cosh^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{3}\cosh^3\alpha + C = \frac{1}{3}\cosh^3(\operatorname{arcsinh} x) + C.$

[4] при интегралите модулът отпада поради изискване смяната да е обратима (монотонна).

Интегриране на диференциален бином

Интегралите от диференциален бином (или биномен диференциал) имат вида

$$I = \int x^m \left(ax^n + b\right)^p \mathrm{d}x, \qquad m, n, p \in \mathbb{Q} \tag{0.14}$$

и се решават със стандартни полагания, които ги свеждат до интеграли от рационални функции, само и единствено в следните три случая:

1. $p \in \mathbb{Z} \longrightarrow x = t^k$, където k е най-малкото общо кратно на знаменателите на m и n, т.е. степените на t в новия интеграл: nk, mk и $k-1$ са вече цели.
2. $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \longrightarrow ax^n + b = t^k$, където с k сме означили знаменателя на p.
3. $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \longrightarrow a + bx^{-n} = t^k$, като k тук отново е знаменателят на p.

Тъй като първото полагане е очевидно, ще докажем второто (третото пък следва от него директно с изнасяне на x^n пред скоби). За целта трабва само да изразим

$$x = a^{-\frac{1}{n}} \left(t^k - b\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{k}{n} a^{-\frac{1}{n}} \left(t^k - b\right)^{\frac{1}{n}-1} t^{k-1} \mathrm{d}t$$

откъдето заместваме в (0.14) и получаваме (докажете аналогично третия случай)

$$I = \frac{k}{n} a^{-\frac{m+2}{n}} \int t^{k(p+1)-1} \left(t^k - b\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \mathrm{d}t.$$

Нека разгледаме един лесен пример, с който да илюстрираме тази субситуция:

$$I = \int x^3 \sqrt{x-1}\, \mathrm{d}x, \qquad (m, n, p) = (3,\ 1,\ 1/2).$$

Следвайки горната рецепта, полагаме $t = \sqrt{x-1}$, откъдето имаме $x = t^2 + 1$ и съответно $\mathrm{d}x = 2t\, \mathrm{d}t$, така за горният интеграл имаме (с връщане в полагането)

$$I = 2\int t^2 (t^2+1)^3 \mathrm{d}t = \frac{2}{9}(x-1)^{\frac{9}{2}} + \frac{6}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Да видим как третият тип интеграли се свежда до втория с изнасяне пред скоби:

$$J = \int \frac{x\, \mathrm{d}x}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^{-3})^{\frac{2}{3}}}, \qquad (m, n, p) = (1,\ 3, -2/3) \ \rightarrow\ (-1, -3, -2/3).$$

Полагането $1 + x^{-3} = t^3$ дава $x = (t^3-1)^{-\frac{1}{3}}$, съответно $\mathrm{d}x = -t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}t$, т.е.

$$J = \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^3}, \qquad t = (x^{-3}+1)^{\frac{1}{3}}.$$

Довършете сами примера, като накрая не забравяте да се върнете в полагането.

Задачи:

1. Като използвате дефиницията на функцията $\sinh x$, докажете тъждеството

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

по аналогия с логаритмичното представяне на $\operatorname{arctanh} x$ по-горе. Намерете първите няколко производни и покажете, че тази функция е гладка $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Решете неопределения интеграл

$$\text{a)} \int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int \frac{2^{-\tan x}}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}\, \mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

3. Решете неопределения интеграл

$$\text{a)} \int \cos(\ln x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int \sin^2 x \sinh x\, \mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x.$$

4. Решете неопределения интеграл

$$\text{a)} \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x+1)^3}\, \mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3+4x}\, \mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\, \mathrm{d}x.$$

5. Решете неопределения интеграл (поне по два начина)

$$\text{a)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(\cos x - \sin x)^2} \qquad \text{b)} \int \frac{\tanh x \cosh 2x}{2\cosh^2 x - \sinh 2x}\, \mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2-1}}.$$

6. Решете неопределения интеграл

$$\text{a)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{b)} \int x^3 \sqrt[4]{1+x^4}\, \mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int \frac{\sqrt{x^3}\, \mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x^2}} \qquad \text{d)} \int \frac{x^3\, \mathrm{d}x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}.$$

7. Решете неопределения интеграл (тук са малко по-творчески задачи)

$$\text{a)} \int \ln \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^3-1}}\, \mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int \frac{\sin^3 x\, \mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \qquad \text{c)} \int \frac{\ln\sqrt{x^3}\, \mathrm{d}x}{x\cos^2(\ln x^2)} \qquad \text{d)} \int \frac{\ln\cos x\, \mathrm{d}x}{\sin^2 x}.$$