Производни и диференциране

Понятието за производна и диференциал на функция е централно в анализа. То идва като непосредствено следствие от идеята за непрекъснатост, граница и инфинитезимално (безкрайно малко) изменение на дадена величина. Така производната $f'(x_0)$ се дефинира като отношение на *инфинитезималното* изменение на функцията f (т.нар. *диференциал* $\mathrm{d}f$) и това на аргумента x в точката $x = x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x=x_0} = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right)_{x=x_0} \tag{0.1}$$

което може да се напише и като граница във вида

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \tag{0.2}$$

Геометричният смисъл е свързан с понятието допирателна към крива, по-точно производната $f'(x_0)$ дава ъгловия коефициент на допирателната към графика на функцията f в точка x_0. Механично тази величина се интерпретира като моментна скорост (в момента x_0) на процес, зададен с еволюционния закон $y = f(x)$.

Операцията *диференциране* съпоставя на дадена функция нейната производна

$$f \ \to \ f' \ \to \ f'' \ \to \ f''' \ \to \ \ldots$$

получена поточково според дефиницията. Диференцирайки повторно, получаваме т.нар. втора производна, асоциирана с механичното ускорение (скоростта на скоростта), а в геометрията - с изпъкналост и кривина. Аналогично се дефинира и $n-$та производна. Най-базисните свойства на диференцирането са *линейност*

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{0.3}$$

и *деривативност*, наричана още и *правило на Лайбниц*

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{0.4}$$

но много често се използва и т. нар. *верижно правило* (chain rule)

$$y'[x(t)] = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right) \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) = y'(x)x'(t).$$

С негова помощ лесно получаваме работна формула за производната на частно

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

както и правило за диференциране на обратна функция $f^{-1}[f(x)] = x$, откъдето

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

като обаче производната на f вдясно е изразена чрез самата функция, тъй като аргумените от двете страни на израза трябва да съвпадат, а имаме съответно

$$f: \quad x \ \to \ y = f(x), \qquad f^{-1}: \quad y \ \to \ x = f^{-1}(y).$$

Прилагайки дефиницията, получаваме някои от т. нар. *таблични производни*

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad (e^x)' = e^x, \qquad \sin' x = \cos x, \qquad \cos' x = -\sin x.$$

За да разширим този списък обаче, се налага да използваме и горните свойства:

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

По същия начин получаваме и останалите обратни функции (уверете се сами!)

$$\ln' x = \frac{1}{x}, \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \mathrm{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Докажете, че за хиперболичните функции имаме аналогично

$$\sinh' x = \cosh x, \qquad \cosh' x = \sinh x, \qquad \tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

и съответно, за техните обратни:

$$\mathrm{arcsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \mathrm{arccosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \mathrm{arctanh}' x = \frac{1}{1-x^2}.$$

Определете дефиниционната област и намерете производната на функциите:

$$y_0(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad y_\pm(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1}).$$

Покажете от представянето на $\cosh x$ и $\sinh x$ съответно като четна и нечетна част на $y = e^x$, че $y_\pm$ и y_0 съвпадат с обратните хиперболични функции по-горе.

Обръщаме внимание, че при функцията y_0 от предния пример е удобно да представим логаритъма като линейна комбинация съгласно добре познатото свойство

$$\ln(x^\lambda y^\mu) = \lambda \ln x + \mu \ln y. \tag{0.5}$$

От друга страна, съгласно верижното правило, ако $f > 0$ и f' съществува, имаме

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \qquad \sqrt{f}' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}, \qquad (\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

откъдето получаваме техника за намиране на производни чрез логаритмуване. Да разгледаме един пример, в който свойството (0.5) помага при диференциране

$$f(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2-1}} \quad \Rightarrow \quad \ln f = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

откъдето лесно намираме производната на логаритъма на функцията във вида

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f} = \frac{3x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2-1} = 2x\left(\frac{x^2-2}{x^4-1}\right)$$

и за производната на самата функция f получаваме (намерете аналогично f''):

$$f' = f\,(\ln f)' = 2x\left(\frac{x^2-2}{x^2-1}\right)\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}.$$