

Задачи

1. Покажете, че редицата $\{i^n\}$ има четири точки на съгъстяване (кои са те?) и изследвайте общия случай на геометрична прогресия $\{q^n\}$ с комплексно частно върху единичната окръжност $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$, разгледайте $a_k = \cos k$.

2. Пресметнете границите (ако съществуват)

$$\text{a) } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \sqrt{k^2 + k + 1}$$

$$\text{b) } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k^2 + 2k - 1}{4k^2 - k + 1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_n(k)}{Q_m(k)}$$

$$\text{c) } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{2^k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{k!}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{k^k}$$

3. Нека $\cosh x$ и $\sinh x$ са дефинирани съответно като четната и нечетна част на функцията $y = e^x$, а $\tanh x$ е тяхното отношение. Докажете твърденията:

$$\text{a) } \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\text{b) } \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\text{c) } \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad \text{d) } \operatorname{arctanh} x = \ln \sqrt{\left| \frac{1+x}{1-x} \right|}, \quad |x| < 1.$$

Намерете производните (екстремуми и инфлексни точки) на тези функции.

4. Пресметнете производната и покажете, че $f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ за следните функции

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{b. } f(x) = \begin{cases} \log_2 \sqrt{1+x^2}, & x \geq 0 \\ |x| \sin x, & x < 0. \end{cases}$$

5. Като използвате правилото на L'Hôpital покажете, че

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$$

6. Пресметнете границите:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(2x+3)}{\ln^2(3x+2)} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cot \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^{2x})^{\cot x} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$$

7. Изследвайте функциите и постройте графиките им:

$$\text{a) } y = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{b) } y = \frac{1}{x} + 4x^2 \quad \text{c) } y = \ln \sqrt{1+x^2} - \arctan x$$

$$\text{d) } y = \ln(1+e^x) \quad \text{e) } y = x + \ln(\cos x) \quad \text{f) } y = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}$$