Производни от по-висок ред, формула на Тейлър

Безкрайните редове намират редица приложения в математиката, физиката и инженерните дисциплини, като например решаване на диференциални уравнения или приближено пресмятане на константи, функционални стойности и интеграли. То отразява и много важна концепция в анализа, свързана с различните порядъци на апроксимация. Нека f е непрекъсната в x_0 функция, тогава имаме

$$x \approx x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \approx f(x_0)$$

по дефиниция, където с "$\approx$" означаваме инфинитезимална близост. Ако пропуснем думата "инфинитезимална", това твърдение продължава да е вярно в някаква достатъчно малка околност на точката x_0. В такъв случай говорим за приближение от *нулев порядък*, тъй като апроксимираме функцията с константа (стойността ѝ в x_0). Аналогично, ако f има и непрекъсната първа производна в x_0, т.е. $f \in C^1(x_0)$, по-прецизното приближение от *първи порядък* (или *линейно*) с допирателната към графиката на функцията в точката x_0, има вида съответно

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad x \approx x_0$$

което в инфинитезималния си вариант дава тъкмо дефиницията на $f'(x_0)$. По подобен начин, при $f \in C^2(x_0)$, лесно се изчислява и квадратичното приближение с парабола, която се докрива от втора степен[1] към графика на функцията в x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2, \qquad x \approx x_0$$

и ако продължим тази процедура с все по-точни приближения на полиноми, като същевременно налагаме все по-рестриктивни условия на f, при граничен преход приближенията от безкрайно висок порядък $k \to \infty$ дават точен израз за функцията f, стига тя да е *гладка* в x_0 (да има производни от произволно висок порядък), което обикновено обозначаваме с $f \in C^\infty(x_0)$, и така полученият ред

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

да бъде сходящ в x. Нека определим общия вид на коефициента a_k в горната сума: за да го изолираме, първо диференцираме k пъти, което елиминира всички събираеми от степен до $k - 1$ включително (защо става така?), и остава изразът

$$f^{(k)}(x) = k!\, a_k + (k+1)!\, (x - x_0) + \dots$$

където единствено първият член в сумата не съдържа множител $x - x_0$, така че само той оцелява като положим $x = x_0$. Тогава очевидно имаме $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$,

[1] в тази точка съвпадат производните до втори ред включително (т. нар. *оскулачни криви*).

което определя еднозначно a_k в *реда на Тейлър*[2] и така стигаме до формулата

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{0.1}$$

Обръщаме внимание, че единствения характерен отпечатък на функцията $f(x)$ се дава от производните й в точка x_0. В частност, ако f е гладка в $x_0 = 0$, имаме

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} \tag{0.2}$$

което понякога се нарича *ред на Маклорен*. Нека разгледаме например показателната функция $f(x) = e^x$. Тъй като при нея $f'(x) = f(x)$, всички производни в нулата съвпадат и имат стойност $f^{(k)}(0) = f(0) = e^0 = 1$, което дава съответно

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{0.3}$$

Нека разгледаме функциите *хиперболичен косинус* и *хиперболичен синус*, които се дефинират съответно като четна и нечетна част на експонентата с формулите

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot \tag{0.4}$$

От самата конструкция е ясно, че степенните им редове се получават отделим събираемите с четни и нечетни степени в (0.3), т.е. за двата реда имаме директно

$$\begin{aligned} \cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned} \tag{0.5}$$

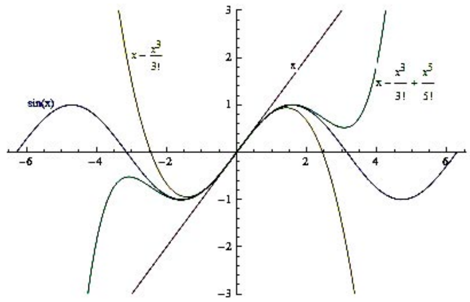
Аналогично, при кръговите тригонометрични функции използваме представянето на Ойлер $z = \mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$ за комплексно число върху единичната окръжност $|z| = 1$, което ги изразява съответно като реална и имагинерна част

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\cdot \tag{0.6}$$

С помощта на формула (0.3) за e^{ix} или от връзката с хиперболичните функции

$$\cos x = \cosh ix, \qquad \sin x = -i \sinh ix$$

[2]обърнете внимание, че при тези означения нулевата производна е самата функция $f^{(0)} = f$.



Фигура 1: Първите три приближения на функцията $\sin x$ около точката $x_0 = 0$.

и получените вече редове (0.5), отчитайки, че $i^{2n} = (-1)^n$, имаме окончателно

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots
\end{aligned}
\tag{0.7}
$$

Обръщаме внимание, че всички получени дотук редове са сходящи върху цялата реална права (което съвсем не е типичният случай). С тяхна помощ можем да получаваме съответните развития за по-сложни функции, например

$$f(x) = \frac{1 - \cosh^2 \sqrt{x}}{x}$$

което лесно можем да представим с ред на Маклорен без да ни се наложи да пресмятаме нито една производна - нека само обърнем внимание, че

$$f(x) = -\frac{\sinh^2 \sqrt{x}}{x} = \frac{1 - \cosh 2\sqrt{x}}{2x}$$

и с помощта на разлагането (0.5) за $\cosh t$ с $t = 2\sqrt{x}$, стигаме до

$$f(x) = -\frac{1}{2x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}\, x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\, x^{k-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!}\, x^k.$$

Можем също така да използваме формулата на Тейлър за да пресмятаме производните на f в някоя точка $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$, което в случая дава $f'''(0) = -\dfrac{2}{105}$, $f^{\mathrm{v}}(0) = -\dfrac{16}{3^4 385}$ и т. н. Завършваме с пример на функция, която няма развитие в ред на Маклорен: $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, тъй като от (0.3) имаме (дефинирано при $x \neq 0$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 2!} + \frac{1}{x^3 3!} + \dots$$

Степенни редове при рационалните функции

Редовете, получени дотук, ползват забележителносто свойство на експонентата $f^{(k)} \equiv f \; \forall\, k \in \mathbb{N}$ и подобно на нея са дефинирани $\forall x \in \mathbb{R}$. В общия случай обаче редовете на Тейлър имат ограничена област на сходимост, а за получаването им трябва да знаем всички производни на функцията в някоя точка, където тя е гладка, което пък налага използването на математически хитрости. Един пример за това е разлагането на рационални функции в елементарни дроби, представени след това като суми на геометрични прогресии с помощта на познатата формула

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1 \tag{0.8}$$

която дава реда на Тейлър (Маклорен) за функцията $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ при $x_0 = 0$. Нека разгледаме и по-общ пример за рационална функция

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

Дробта е правилна (степента на знаменателя е по-висока), корените са прости, значи разлагането е валидно и коефициентите можем да изчислим с *метода на Хевисайд* като заместим двата корена в специално конструираната функция $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{(x^2-4x+3)'} = \frac{x+1}{2x-4}, \qquad A = \varphi(1) = -1, \qquad B = \varphi(3) = 2$$

откъдето вече лесно изразяваме

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x-3} = \frac{1}{1-x} - \left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{1-\dfrac{x}{3}}$$

и с помощта на формула (0.8) получаваме окончателно степенния ред във вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \left(\frac{2}{3}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{3^{k+1}}\right)x^k$$

като за сходимостта се изисква едновременно $|x| < 1$ и $|x| < 3$, така че областта се дава от сечението на двата интервала, което тук е $|x| < 1$. Пресметнете $f'''(0)$!

Ако в знаменателя имаме и комплексни корени, обикновено предпочитаме да не разлагаме докрай за да избегнем комплексните коефициенти, а вместо това допълваме до точен квадрат. Следващият лесен пример илюстрира тази идея

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^{2n}, \qquad x \in (-2, 0).$$

Почленно диференциране и интегриране

В случая на рационални функции с кратни корени в знаменателя, геометричната прогресия отново играе ключова роля, но се налага и допълнително почленно диференциране, което запазва радиуса на сходимост. Да разгледаме например

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x^2+1}{(1-x)^2(1+x)}.$$

Следвайки стандартната процедура за разлагане на елементарни дроби, имаме

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x}{1-x^2}$$

където за удобство означаваме първото събираемо вдясно с $S(x)$ и с помощта на почленно диференциране лесно получаваме развитието в степенен ред

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-x} + C = \sum_{k=0}^{\infty} x^k + C \quad \Rightarrow \quad S(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k.$$

Комбинирайки двата реда по-горе, получаваме

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k - \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

където $a_n = n$ при $n = 2k$ и $a_n = n+1$ при $n = 2k+1$, или накратко

$$a_n = \frac{1}{2}\,(2n + (-1)^n - 1).$$

Почленното интегриране се ползва често при логаритмични и обратни тригонометрични функции. Да разгледаме например $f(x) = \ln(x+1)$, която е трансцендентна, но с рационална производна, която се развива в геометрична прогресия

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

и след това с почленно интегриране получаваме

$$\ln(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

където лесно се вижда, че $C = 0$, като положим $x = 0$ от двете страни на равенството. Аналогично за функцията $f(x) = \arctan x$ имаме (довършете детайлите)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

откъдето почленното интегриране ни дава развитието в степенен ред във вида

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,.$$

Биномен ред

Припомняме биномната формула на Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{0.9}$$

където коефициентите в разлагането се получават комбинаторно или с диференциране (всеки полином P_n съвпада с реда си на Taylor, като $a_k \equiv 0$ при $k > n$). Покажете, че $k-$ тата производна на функцията $(1+x)^n$ в точката $x = 0$ дава тъкмо $n(n-1)\dots(n-k+1)$, откъдето следва горната формула. Това важи и за по-общ клас функции от вида $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$, където $\alpha \in \mathbb{Q}$. При тях обобщените биномни коефициенти се получават аналогично чрез последователно диференциране в нулата $f_\alpha^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$, което дава развитието

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \tag{0.10}$$

известно като *биномен ред*, обобщаващ полинома (0.9) за случая $\alpha \notin \mathbb{N}$. Не е трудно да се докаже, че този ред е абсолютно сходящ при $|x| < 1$, аналогично на геометричната прогресия, която се явява частен случай при $\alpha = -1$, тъй като

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \binom{-1}{k} = \frac{-1(-2)(-3)\dots(-k)}{k!} = (-1)^k.$$

Друг стандартен пример е функцията $f(x) = \sqrt{1+x}$, за която лесно получаваме

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{16}\,x^3 - \frac{5}{144}\,x^4 + \dots$$

като в този случай редът е сходящ и в краищата на интервала, т.е. при $x = \pm 1$.

Формула (0.10) също може да се комбинира с почленно диференциране и интегриране, например за функцията $f(x) = \arcsin x$ лесно получаваме биномното развитие на производната във вида (пресметнете първите няколко коефициента)

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k}, \qquad |x| < 1$$

откъдето почленното интегриране дава (покажете, че и тук константата е нула)

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad |x| \le 1.$$

Оценка на точността и някои приложения

Едно основно приложение на редовете на Taylor е свързано с изчисляването на проближени стойности, поради което е важно да имаме оценка на грешката R_{n+1} при апроксимация на функцията f с полином от степен n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}. \qquad (0.11)$$

Класическата теорема за средната стойност дава т.нар. *остатъчен член* в реда

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad \xi \in (x_0, x) \qquad (0.12)$$

където точката ξ не е известна a priori, поради което е нужно да намерим оценка[3] на функцията $f^{(n+1)}$ в интервала $[x_0, x]$ от вида $|f^{(n+1)}| \leq M$, и тогава ни дава

$$|R_{n+1}| \leq M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (0.13)$$

Например за функцията $f(x) = \sin x$ имаме очевидната оценка $M = 1$ независимо от реда на проближението (обяснете защо!). Ако вземем вместо това $f(x) = \ln(x+1)$ в интервала $[0,1]$, където $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, можем да получим по индукция

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{n!\,(-1)^n}{(\xi+1)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad |f^{(n+1)}| \leq n! \quad \Rightarrow \quad |R_{n+1}| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Горните два примера илюстрират частния случай на т.нар. алтернативни редове, за които е изпълнено $a_n a_{n+1} < 0$ и оценката на грешката при приближение става елементарна с помощта на следната теорема (опитайте се да я докажете сами!):

Теорема 0.1. *При алтернативни редове за остатъчния член важи оценката*

$$|R_{n+1}| \leq |a_{n+1}|.$$

Да разгледаме например $f(x) = \arctan x$ и нека изчислим стойността на ъгъла (в градуси) ϕ, при който $\cot\phi = 2$, с точност $\epsilon \sim 10^{-3}$, т.е. искаме грешката да не превишава половината от следващия порядък $|R_{n+1}| \leq 5 \times 10^{-4}$. Тъй като имаме

$$\arctan\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{-(2k+1)}}{2k+1} = \frac{1}{2} - \frac{2^{-3}}{3} + \frac{2^{-5}}{5} - \frac{2^{-7}}{7} + \frac{2^{-9}}{9} - \dots$$

и редът е алтернативен, първото събираемо, за което $|a_{n+1}| < 5 \times 10^{-4}$, а това в случая е изпълнено при $n = 3$, ще ни покаже докъде е достатъчно да сумираме:

$$\phi \approx \frac{180}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{2^{-3}}{3} + \frac{2^{-5}}{5} - \frac{2^{-7}}{7}\right) \approx 26.555°.$$

[3] функцията $f^{(n+1)}$ е ограничена, тъй като е непрекъсната в компактния интервал $[x_0, x]$.

Нека сега изчислим $\cosh(1)$ с точност $\epsilon \sim 10^{-3}$. Тъй като редът за $f(x) = \cosh x$ не е алтернативен, ще ползваме общата оценка (0.13). В интервала $[0,1]$ както sinh, така и cosh са неотрицателни, и от $\sinh\xi + \cosh\xi = \mathrm{e}^{\xi}$ имаме $f^{(n+1)}(\xi) < e < 3$ в $\xi \in [0,1]$, което дава оценката $|R_{n+1}| < \dfrac{3}{(2n+2)!} < 5 \times 10^{-4}$ отново при $n = 3$, и

$$\cosh(1) \approx 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} \approx 1.543.$$

По същия начин пресмятаме приближено и интеграли: за да получим например $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ с точност $\epsilon \sim 10^{-6}$ ползваме разлагането (0.3), което в случая дава

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

и с почленно интегриране в посочените граници, лесно получаваме

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2^{-2n-1}}{2n+1}.$$

Редът е алтернативен и условието $|a_{n+1}| < 5 \times 10^{-7}$ се изпълнява при $n = 5$, т.е.

$$I \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{7.2^7 3!} + \frac{1}{9.2^9 4!} \approx 0.461281.$$

Редовете на Taylor се прилагат и в пресмятането на граници, например за

$$L = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{\sinh x}{\arctan x} \right)$$

вместо да използваме многократно правилото на l'Hôpital, можем просто да отчетем първите няколко члена в степенните редове на горните функции

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \dots, \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots, \quad \sinh x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

откъдето при $x \to 0^+$ лесно получаваме

$$L = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 - \frac{x^6}{9} - x^2 + \frac{x^4}{6} \right) \left(x^2 - \frac{x^4}{3} \right)^{-1} = 0.$$

И накрая, ще разгледме задачата на Cauchy за диференциалното уравнение

$$x^2 y'' + y' - y = \frac{x}{x+1}, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

Ако допуснем, че съществува аналитично решение от вида $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, с директно диференциране получаваме

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}\,x^k, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k\,x^{k-2}$$

което след заместване в уравнението дава

$$a_1 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k{+}1)a_{k+1} + (k^2{-}k{-}1)a_k\right]x^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^k.$$

Като приравним коефициентите пред x^k от двете страни и използваме началните условия за определняне на a_0 и a_1, лесно получаваме рекурентното изразяване

$$a_{k+1} = \frac{(1+k-k^2)a_k + (-1)^{k+1}}{k+1}, \qquad a_0 = a_1 = 1.$$

Задачи

1. Получете развитието в ред на McLaurin за функциите

   a) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}\sin^2 x, \qquad f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, \qquad f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

   b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-x^2+x-1}, \qquad f(x) = 2^x, \qquad f(x) = \sqrt{1+x^2} - x\,\mathrm{arcsh}\,x$

2. Като използвате почленно диференциране, докажете тъждествата

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{kx^{2k}}{(2k)!} = -\frac{x}{2}\sin x, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{kx^{2k+1}}{(2k{+}1)!} = \frac{x}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

3. Изчислете с точност $\epsilon \sim 10^{-3}$

   a) $\sqrt{2}, \qquad e^{-\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt{9998}, \qquad \sin 1^\circ$

   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}\,.$

4. Пресметнете производната $f^{(33)}(x_0)$ на $f(x) = \left(\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)^2$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Намерете аналитично решение на задачата на Cauchy

   a) $y'' + xy = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

   b) $(1-x^2)y'' - xy = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$