Свободни вектори и точки в равнината

Има съществена разлика в интерпретацията на $\mathbb{R}^2$ като *линейно* и *афинно* пространство: в първия случай елементите са *свободни вектори*, а във втория - точки $A_i(x_i; y_i)$ в равнината, описани със своите *радиус-вектори* $\mathbf{r}_i$, чиито компоненти са координатите на x_i, y_i във фиксирана отправна система. Ако последната е отместена с *вектор на транслацията* $\mathbf{a}$, те се трансформират като $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{a}$. При радиус-векторите, също както и при свободните вектори, имаме операците събиране и умножение с число (по компоненти), и в частност, разликата им $\vec{A_iA_j} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ остава непроменена при *транслации*, следователно може да се интерпретира като свободен вектор. Тази разлика можем да изобразим геометрично като насочена отсечка от A_1 към A_2, която обаче, за разлика от свързаната с координатното начало векторна сума $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ (вж. Фигура 1), може да се мести свободно, без завъртане и промяна в дължината. Това свойсвто остава в сила и за всяка линейна комбинация, в която сумата от коефициентите е равна на нула.

Скаларно и външно произведение

Скаларното произведение в $\mathbb{R}^n$ се дефинира като матрично умножение (сума от прозведенията на компоненти с еднаква стойност на индекса). При $n = 2$ имаме

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = x_1x_2 + y_1y_2. \tag{0.1}$$

откъдето следва дефиницията за *евклидово разстояние* по теоремата на Питагор

$$d(A_1, A_2) = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{0.2}$$

Друга често използвана конструкция е т.нар. *външно произведение*

$$\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = x_1y_2 - x_2y_1 \tag{0.3}$$

което реализира идеята за детерминанта и е анти-симетрично $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_1$ за разлика от симетричното скаларно произведение $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1$, което в общия случай се свързва с проекции. Това става ясно от тригономтричното представяне

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2| \cos\gamma \tag{0.4}$$

където γ е ъгълът между двата вектора. Аналогично в анти-симетричния случай

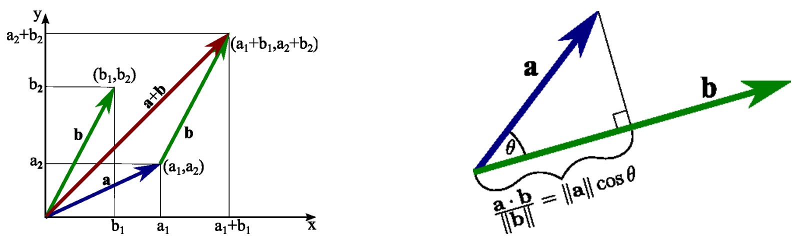
$$\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2| \sin\gamma \tag{0.5}$$

което дава лицето на успоредника, определен от двата вектора (вж. Фигура 1). Последните две равенства се доказват лесно с въвеждането на полярни координати (0.13), които разглеждаме по-долу. От тях лесно можем да изразим ъгъла

$$\gamma = \mathrm{atan}_2\,(\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \tag{0.6}$$

заедно с критериите за ортогоналност и успоредност на два вектора във вида:

$$\mathbf{r}_1 \perp \mathbf{r}_2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0, \qquad \mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = 0. \tag{0.7}$$



Фигура 1: Геометрична интерпретация на векторна сума и скаларно произведение.

Успоредни и ортогонални проекции, координатни системи

В аналитичната геометрия работим с координати на точки и вектори, зададени с числови матрици. Тези стойности, както вече стана дума по-горе, в общия случай зависят от избора на координатна система. В планиметричните задачи обикновено работим в т.нар. *стандартен базис*, зададен с въвеждането на взаимно ортогонални единични вектори по абсцисата и ординатата, като всеки равнинен вектор се *разлага* в този базис с успоредните си (*контравариантни*) проекции по координатните оси, съгласно правилото за векторна сума (вж. Фигура 1)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1\,\mathbf{e}_1 + v_2\,\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Последните, в случая на *ортогонормирани* (т.е. ортогонални, с единични вектори по осите) базиси са равни на ортогоналните (*ковариантни*) компонентни и следователно се дават като скаларни произведения $v_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i$. Да вземем друг такъв базис: $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. В него компонентите на $\mathbf{v}$ се изразяват като $\tilde{v}_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_i$, а връзката се дава с $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v_1+v_2 \\ v_2-v_1 \end{pmatrix}$. Всеки ортогонален базис може лесно да бъде приведен в ортонормиран с премащабиране на осите, а в случая на *клиногонални* (не-ортогонални) басиси, съществува по-обща процедура (метод на Грам-Шмидт), но можем да работим и с директно изразяване. Нека например $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}\}}$ в стандартния базис и са ни дадени $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ако изразим $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{a}_2 = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, лесно получаваме от решението на системата $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, или $\mathbf{e}_1 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ and $\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{a}_2 - 5\mathbf{a}_1$. Замествайки в горния израз за $\mathbf{v}$, накрая намираме $\mathbf{v} = 4(3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + 3(2\mathbf{a}_2 - 5\mathbf{a}_1) = 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_1$, т.е. в новия базис имаме представянето[1] $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{a}\}}$. Друг възможен подход е въвеждането на *дуален базис* $\{\mathbf{a}'_i\}$, в който отрогоналните компоненти $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'_i$ дават успоредните в изходния $\{\mathbf{a}_i\}$, но тази конструкция се илюстрира по-добре в $\mathbb{R}^3$ с помощта на векторно произведение (опитайте се тук да я получите сами).

[1]равенството между матрици има смисъл в конкретно зададена координатна система.

Делене на отсечка в дадена пропорция, геометричен център

Основен резултат в геометрията е теоремата на Талес, според която пропорциите се запазват при успоредно проектиране. Едно пряко следствие от нея е, че ако точка $M(x_m; y_m)$ дели отсечката, свързваща $A(x_0; y_0)$ и $B(x_1; y_1)$ в отношение $\lambda : 1$, това важи и за x и y компонентите на векторите $\vec{AB}$, $\vec{AM}$ и $\vec{MB}$, т.е. имаме

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{x_m - x_0}{x_1 - x_m} = \frac{y_m - y_0}{y_1 - y_m} = \lambda.$$

Оттук лесно можем да изразим координатите на точка M като

$$x_m = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \qquad y_m = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda} \tag{0.8}$$

което съвпада с израза за средно аритметично в частния случай когато M е среда на отсечката ($\lambda = 1$). Това ни дава например директен матод за построяване на медиани в триъгълника, свързвайки даден връх със средата на срещуположната страна. Освен това, както знаем, тяхната пресечна точка $G(x_g; y_g)$, известна още като геометричен център (*медицентър*) на триъгълника, дели всяка от тях в отношение $2 : 1$, считано от върха. Тогава формула (0.8) ни дава в този случай:

$$x_g = \frac{x_2 + 2x_m}{1 + 2}, \qquad y_g = \frac{y_2 + 2y_m}{1 + 2}$$

където, изразявайки x_m, y_m от (0.8), получаваме координатите на медицентъра

$$x_g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y_g = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \tag{0.9}$$

Този резултат се обобщава за всеки изпъкнал равнинен полигон с N върха като

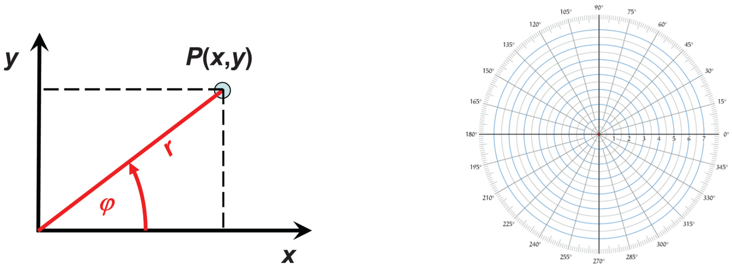
$$\mathbf{r}_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \tag{0.10}$$

така че аритметичното осредняване се запазва. Формулата е тясно свързана и с понятието “център на масите” за система от материални точки[2], чиити координати се дават с радиус-векторите $\mathbf{r}_i$, а всяка от тях има маса m_i. Така имаме

$$\mathbf{r}_g = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i, \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{0.11}$$

като коефициентът λ от формула (0.8) в този контекст може също да бъде интерпретиран като съотношение на масите, което определя колко отдалечен е гравитационният център от всяка материална точка по свързващата ги отсечка.

[2]идиализиран точков обект в механиката, на който обаче са присъщи физични свойства свойства като маса, електрически заряд и т.н.



Фигура 2: Полярна смяна и асоциирана с нея координатна мрежа.

Полярни координати

След като въведохме мярка за евклидовото разстояние между две точки с формула (0.2), можем да зададем окръжността с център A_0 и радиус R като феометрично място на точки $A(x; y)$, равноотдалечени от A_0 на разстояние $d(A, A_0) = R$, което дава квадратично уравнение за координатите x и y във вида

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{0.12}$$

В частност, ако изберем A_0 да съвпада с координатното начало, получаваме просто $x^2 + y^2 = r^2$, а при $r = 1$, това дава често срещаната в алгебрата на комплексните числа и тригонометрията *единична окръжност*, параметризирана още като $z = e^{i\varphi} = \sin\varphi + i\cos\varphi$. Полярната смяна в равнината (вж. Фигура 2)

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{0.13}$$

дава именно тригонометричното представяне на комплексно число z с модул $|z| = r$, който в общия случай се нарича *радиална промелнива*, а аргументът φ съответно, *полярен ъгъл*. Те се изразяват от *декартовите координати* (проекциите върху координатните оси) чрез т.нар. *обратна поляра смяна*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \mathrm{atan}_2(y, x) \tag{0.14}$$

където $\mathrm{atan}_2(y, x)$ дава ъгъла с тангенс y/x в правилния квадрант, отчитайки поотделно знаците на числителя и знаменателя. *Линиите на ниво $r = const.$* са концентрични окръжности с радиус r, а $\varphi = const.$ радиални лъчи от координатното начало, сключващи ъгъл φ с положителната посока на абсцисата. Заедно те изграждат *полярната координатна мрежа* (вж. Фигура 2). Една особеност при нея е *сингулярността в нулата*: преминаването през тази точка по някой радиален лъч добавя към полярния ъгъл фаза $\pm\pi$. Обръщаме внимание, че тези координати, за разлика от декартовите, не са линейни, например $(r_1, \varphi_1) + (r_2, \varphi_2) \neq (r_1 + r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$. От друга страна обаче, те дават тригонометричната интерпретация на скаларното и външно произведение, с които се запознахме по-горе. Забележете още, че ако използваме съответсвието между радиус-вектори на точки в равнината и комплексни числа $\mathbf{r}_i \longleftrightarrow z_i \in \mathbb{C}$, имаме

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = Re(\bar{z}_1 z_2), \qquad \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = Im(\bar{z}_1 z_2).$$

Как се разполовява ъгъл?

В аналитичната геометрия има различни методи за построяване ъглополовяща: стандартният, с който предстои да се запознаем, използва свойство за равна отдалеченост от двете прави, образуващи съответния ъгъл. Друго полезно свойство е, че ъглополовящата в триъгълника дели срещуположната страна в същото отношение, в което са дължините на прилежащите, а това позволява да намерим съответната точка от формула (0.8). Тук обаче ще разгледаме един много прост метод, който използва геометричната интерпретация на векторната сума като диагонал в успоредник (вж. Фигура 1). В частност, ако успоредникът е ромб (което лесно се урежда с премащабиране на едно от събираемите), диагоналите разполовяват ъглите. Нека са дадени например точки $A(1;0)$ и $B(3;4)$, и да разгледаме ъгъла, който двата радиус-вектора сключват помежду си. Тъй като $|\mathbf{r}_A| = 1$ и $|\mathbf{r}_B| = 5$, достатъчно е да умножим първия от тях по 5 и тогава сумата

$$\mathbf{r}_\ell = 5\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

е ориентирана по направлението на търсената ъглополовяща. В общия случай

$$\mathbf{r}_\ell \sim |\mathbf{r}_B|\, \mathbf{r}_A + |\mathbf{r}_A|\, \mathbf{r}_B. \tag{0.15}$$

Задачи

1. Кои проекции на вектора $\mathbf{v}$ използваме при разлагането $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$ в базиса $\{\mathbf{a}_k\}$ - успоредните или ортогоналните?

2. $5G$ излъчвател трябва да бъде равно отдалечен от две административни сдания A и B, и два пъти по-близо до офис-сграда C. Можете ли да напишете точно решение за координатите на антената и единствено ли е то?

3. Нека е зададен триъгълник с върхове $A(4;0)$, $B(3;\sqrt{3})$ и $O(0;0)$.

   a) Намерете ъглите при трите върха и лицето на триъгълника.

   b) Пресметнете разстоянието от геометричния център на $\triangle ABO$ до огледалния образ B' на точка B спрямо Oy (осева симетрия).

   c) Намерете направленията на ъглополовящите в $\measuredangle AOB$.

4. При зададени $A(1;3)$ и $B(2;-1)$, намерете координатите на точка M, която дели отсечката AB в т.нар. "златно сечение" $|AM| : |MB| = |MB| : |AB|$.

5. Ако векторът $\mathbf{v}$ е представен в стандартния базис $\{\mathbf{e}_k\}$ с матрицата $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, намерете компонентите му в базиса $\{\mathbf{a}_k\}$, зададен в $\{\mathbf{e}_k\}$ от $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot$ Използвайте, че $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ и получете ортонормиран базис.