Вектори и базиси в $\mathbb{R}^3$

Основните свойсва на векторите в $\mathbb{R}^2$ се обобщават и за $\mathbb{R}^n$, като например идеята за линейна зависимост. Казваме, че една система вектори $\{\mathbf{a}_k\}$ е *линейно зависима* ако съществува тривиална (т.е. равна на нула) линейна комбинация от нейните елементи $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0$, в която има поне един ненулев коефициент λ_i. В противен случай, векторите в системата са *линейно независими*. Максималният брой линейно независими вектори в една система се нарича неин *ранг* и той не може да надвишава размерността n на съответното пространство: $\mathrm{rg}\{\mathbf{a}_k\} \leq n$. В $\mathbb{R}^2$ например всеки три вектора са линейно зависими, което дава възможност единият да се изрази като линейна комбинация на другите два. Казваме, че системата $\{\mathbf{a}_k\}$ задава *базис* в $\mathbb{R}^n$ ако е от максимален ранг и векторите в нея са линейно независими. Тогава всеки вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ може да бъде *разложен* в базиса $\{\mathbf{a}_k\}$, т.е. представен като линейна комбинация от вида

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} v^i \mathbf{a}_i \tag{0.1}$$

където коефициентът v^i се дава от *успоредната проекция* на $\mathbf{v}$ върху направлението, определено от $\mathbf{a}_i$. В случая на *ортогонален базис* имаме $\mathbf{a}_i \perp \mathbf{a}_j$ при $i \neq j$ и тогава той съвпада с *ортогоналната проекция* v_i върху единичния вектор $\hat{\mathbf{a}}_i$:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{a}}_i, \qquad \hat{\mathbf{a}}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|}\cdot \tag{0.2}$$

Така конструираният басис $\{\hat{\mathbf{a}}_i\}$ се нарича *ортонормиран* (ортогонален и нормиран), което означава, че скаларните произведения образуват единична матрица

$$\hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j = \delta_{ij} = \left| \begin{array}{ll} 0\,, & i \neq j \\ 1\,, & i = j. \end{array} \right. \tag{0.3}$$

Връзката между компонентите на $\mathbf{v}$ в два различни базиса $\{\hat{\mathbf{a}}_k\}$ и $\{\hat{\mathbf{a}}'_k\}$ с дава с т.нар. *матрица на преход* $T \leftrightarrow \{\tau_i^j\}$ от $\{\hat{\mathbf{a}}_k\}$ в $\{\hat{\mathbf{a}}'_k\}$ чрез матрично умножение

$$\hat{\mathbf{a}}_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_i^j\, \hat{\mathbf{a}}'_j \tag{0.4}$$

където i-тият вектор-стълб на T се дава с координатите на $\hat{\mathbf{a}}_i$ в новия базис $\{\hat{\mathbf{a}}'_j\}$. Тъй като разлагането (0.1) в двата базиса представя същия геометричен обект

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v'^j \mathbf{a}'_j = \sum_{i=1}^{n} v^i \mathbf{a}_i = \sum_{i,j=1}^{n} v^i \tau_i^j \mathbf{a}'_j \quad \Rightarrow \quad v'^j = \sum_{i=1}^{n} \tau_i^j v^i$$

т.е. успоредните (*контравариантни*) компоненти се трансформират именно с

$$T:\ v^i \to v'^j.$$

Аналогично, за ортогоналните проекции (*ковариантни компоненти*) v_i се прилага $(T^t)^{-1}$ известна като *контраградиентна* трансформация на T, както лесно може да се види от (0.2) и (0.4). В частност, ако двата базиса са ортонормирани, както най-често ги избираме за удобство, няма разлика между ковариантни и контравариантни компоненти, а матрицата на прехода е *отрогонална*, т.е. удовлетворява свойството $T^t = T^{-1}$, откъдето следва, че $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = T\mathbf{u}\cdot T\mathbf{u}$. Трансформацията запазва дължините и ъглите (такива обикновено наричаме *изометрии*), като имаме очевидно $\det T = \pm 1$ (защо е очевидно?). В частност, ако $\det T = 1$, ориентацията също се запазва и T се свежда до *ротация* (въртене), в противен случай съдържа и отражение. По-общо, ако разглеждаме $\mathbb{R}^3$ като *афинно пространство* (от точки вместо свободни вектори), запазващите ориентацията изометрии са *евклидовите движения*: *ротации* и *транслации* (премествания).

Векторно и смесено произведение

Освен скаларното произведение, което се обобщава директно за произволна размерност като матрично умножение ($U \to U^t$ съгласно правилото "ред по стълб")

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = U^t V = \sum_{k=1}^{n} u^k v_k = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{0.5}$$

дефинирахме и т.нар. *външно произведение* на два вектора в равнината като

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{0.6}$$

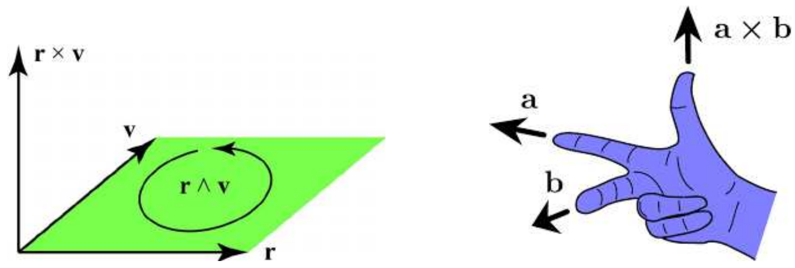
което пък дава ориентираното лице на успоредника, определен от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Тази конструкция също се обобщава, но при $n \geq 3$ става многокомпонентна величина

$$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})_{ij} = u_i v_j - v_i u_j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots n \tag{0.7}$$

която е очевидно анти-симетрична и има $k = \dfrac{n(n-1)}{2}$ независими компоненти (обяснете защо!). В частност, при $n=3$ имаме $k=3$ и тази величина може да бъде представена като вектор[1] с компоненти, равни на адюнгираните количествата в развитието по първи ред на детерминантата (тук $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ и $\hat{\mathbf{e}}_3$ са базисните вектори)

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}. \tag{0.8}$$

[1] понякога наричан още *псевдовектор*, тъй като се запазва при смяна на ориентацията.



Фигура 1: Геометричен смисъл на векторното произведение (вляво) и правило на дясната ръка при ориентацията на векторни базиси (вдясно).

Тази конструкция, характерна само за $\mathbb{R}^3$, се нарича *векторно произведение*. За произволни $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, векторът $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ е перпендикулярен на равнината, определена от тях и трите в този ред образуват "дясна тройка" (по правилото на дясната ръка, илюстрирано на Фигура 1), като големината $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ отново задава лицето на успоредника, определен от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. В частност, ако те са в x, y-равнината, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ е вектор по z-направлението, с големина равна на $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$. Поради тези свойства, конструкцията се използва за определяне на нормално направление, допълване на базиси, както и пресмятане на лица и обеми в $\mathbb{R}^3$. Например, ако $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, прибавяйки към тях $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, получаваме ортогонален базис.

Смесено и двойно векторно произведение

Въпреки че външното произведение е асоциативно, т.е. $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$, това свойство не важи за векторното умножение: при него са в сила правилата

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u} \\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{w}. \end{aligned} \tag{0.9}$$

Забележете, че двойното векторно произведение винаги дава вектор, който лежи в равнината, определена от двата вектора в скобите (и обяснете защо е така!).

Външното произведение в $\mathbb{R}^3$ има смисъл и за три вектора - тогава то дава ориентирания обем на призмата, определена от тях като детерминанта от вида

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{0.10}$$

е известно още като *смесено произведение* на $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, като се означава също с

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}.$$

Горните равенства следват директно от дефиницията на скаларно и векторно произведение. Предвид геометричния смисъл на последното, имаме още

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{n} = S_B \mathbf{n}$$

където $\mathbf{n}$ е единичният нормален вектор към равнината, определена от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а S_B - лицето на определения от тях успоредник, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{w}| \cos \measuredangle(\mathbf{n}, \mathbf{w})$ пък дава височината h на призмата, определена от трите вектора, откъдето имаме

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cos \measuredangle(\mathbf{n}, \mathbf{w}) = S_B h = V.$$

Едно директно следствие е, че три копланарни вектора дават нулева детерминанта (детерминантата е ненулева само при максимален ранг). Ето още една полезна формула, чието доказателството оставяме за домашна

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}). \tag{0.11}$$

Задачи

1. Нека $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}$ е стандартният базис и $T: \{\hat{\mathbf{e}}_k\} \to \{\mathbf{a}_k\}$ е матрицата на прехода в $\{\mathbf{a}_k\}$. Покажете, че $G^{-1} = TT^t$, където G е матрицата на Gram: $G_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$.

2. Докажете, че векторното произведение удовлетворява тъждествата на Jacobi

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$$

3. Докажете частния случай на формула (0.11), в който

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

като за общия може да се използва свойството

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

4. Намерете стойността на $\tan \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и обема на призмата, разпъната от $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, където $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Пресметнете обема на пирамида $ABCD$ с върхове $A(1;2;1)$, $B(-1;0;3)$, $C(2;0;0)$ и $D(3;1;0)$. Намерете геометричния му център, повърхнината, обема и разстоянието от върха D до равнината, определена от A, B и C.

Прави и равнини в пространството

Както видяхме, много от стандартните конструкции в равнината се обобщават директно за $\mathbb{R}^3$, но съществуват и доста разлики. Освен като векторно пространство, последно се интерпретира и като пространство от точки, които задаваме с радиус-вектори, свързани с някоя координатна система (*афинно пространство*). Тук се появяват геометрични обекти - криви и повърхнини, които описваме със системи уравнения. В частност, линейните уравнения задават линейни обекти: прави и равнини. Например параметричното представяне на права в $\mathbb{R}^3$ се въвежда точно както в $\mathbb{R}^2$, но с още една координатна функция (вж. Фигура 2):

$$g: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{t}, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{0.12}$$

което разписано по компоненти има вида

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda t_1 \\ y &= y_0 + \lambda t_2 \\ z &= z_0 + \lambda t_3 \end{aligned} \tag{0.13}$$

като и тук $\mathbf{t}$ задава т. нар. *направляващ вектор* на g. Аналогично, уравнението на права през точките с радиус-вектори $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$, може да бъде получено във вида

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{0.14}$$

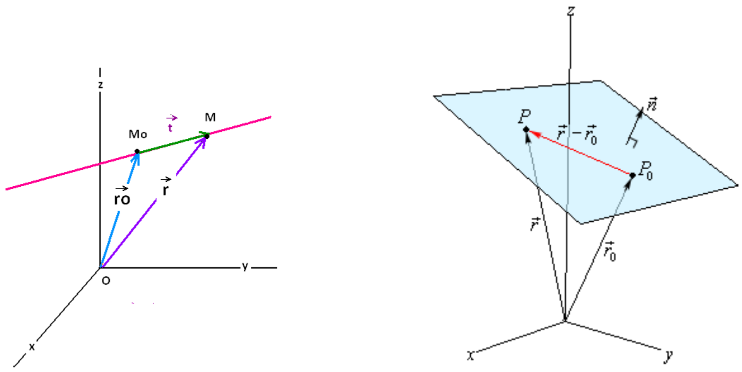
където разликата с равнинния случай е само в наличието на трета координата. За разлика от двумерния случай обаче, тук имаме две линейни уравнения вместо едно. Причината е че за да се получи едномерен обект в триизмерно пространство, като линията, описана от свободния параметър λ във формула (0.12), се нуждаем от две връзки: $3 - 2 = 1$, докато в равнината една линейна връзка е достатъчна. Аналогично обектът, който се описва от една линейна връзка в $\mathbb{R}^3$

$$\alpha: \quad ax + by + cz + d = 0 \tag{0.15}$$

е двумерна равнина, а (0.15) е нейното *общо уравнение*. Геометричният смисъл на коефициентите е същият като при правите в $\mathbb{R}^2$: a, b и c се интерпретират като компоненти на *нормалния вектор* $\mathbf{n}$ и съответно $d = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$, където $\mathbf{r}_0$ е радиус-вектор на произволна точка A от α. Това лесно се показва като съобразим, че ако вземем друга точка от α с радиус-вектор $\mathbf{r}$, разликата $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ задава свободен вектор, който е винаги успореден на α (вж. Фиг. 2) и следователно $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. В частност, ако изберем единичен нормален вектор $\mathbf{n}_0 = \dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ получаваме съответно

$$\alpha: \quad \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \tag{0.16}$$

известно като *нормално уравнение* на равнина, с чиято помощ определяме разстоянието от точка B с радиус-вектор $\mathbf{r}_1$ до α. За целта проектираме векторната



Фигура 2: Прави и равнини в тримерно (афинно) пространство.

разлика $\vec{AB} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$, която дава насочна отсечка от $A \in \alpha$ към B по нормалата и съответно, разстоянието d между точка B и ортогоналната ѝ проекция B' в α

$$\mathrm{d}(B, \alpha) = |(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}_0| \tag{0.17}$$

което е дефиницията за разстояние между точка и равнина. Преди да вземем абсолютна стойност от израза вдясно имаме т. нар. ориентирано разстояние, чиито знак зависи от това дали $\mathbf{n}_0$ и $\vec{AB}$ сключват остър или тъп ъгъл, т.е. от избора на ориентация за единичната нормала, който при прави и равнини не е фиксиран.

Друг полезен начин за задаване на равнина е чрез т. нар. *отрезово уравнение*

$$\alpha : \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1 \tag{0.18}$$

в което a', b' и c' са отрезите от координатните оси (прободните точки на α с Ox, Oy и Oz съответно). В равнинния аналог имаме отрезово уравнение на права, като a' и b' задават координатите на пресечните точки с Ox и Oy. В практиката често се налага също да намерим уравнението на равнина по зададени три (не-колинеарни) точки $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ и $C(x_2, y_2, z_2)$ от нея. Лесно съобразяваме, че за произволна точка $X \in \alpha$ с радиус-вектор $\mathbf{r}$, векторите $\vec{AB} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$, $\vec{AC} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0$ и $\vec{AX} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ са копланарни (разпъват нулев обем)

$$\alpha : \quad \vec{AX} \wedge \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{0.19}$$

Коефициентите в общото уравнение (0.15) на равнината са тъкмо адюнгираните количества на първия ред, съответно нормалният вектор има вида $\mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$.

Взаимно положение и релации на инцидентност

По-високата размерност предлага повече възможности за взаимно положение на геометрични обекти, но много неща от планиметрията се обобщават директно: например разстоянието между точки $A(x_0; y_0; z_0)$ и $B(x_1; y_1; z_1)$ в пространството се дава от тримерната питагорова теорема за телесния диагонал в паралелепипед

$$|AB| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}. \tag{0.20}$$

Аналогично, ориентираното разстояние от точка A до равнина α намираме като в нормалното уравнение на равнината заместим координатите на точката. За намирането на разстояние от точка A до права g или между две прави обаче, конструкцията се усложнява. В първия случай например се оказва полезно да построим равнина α, която съдържа точката A и е перпендикулярна на правата g, тогава разстоянието $d(A, g)$ се дава от горната формула като $|AB|$, където $B = \alpha \cap g$ е прободната точка на g с α. Така в пространството става по-осезателна необходимостта да се използват т.нар. *релации на инцидентност*: "съдържа" и "съдържа се в". Алгебричният им израз може да е свързан с това координатите да удовлетворяват някаква система уравнения или дадена детерминанта да става равна на нула - така например (0.14) и (0.19) представляват условия съответно за колинеарност на три и копланарност на четири точки. Както видяхме при изледването на системи ленейни уравнения, в тримерния случай те дават пресичания на равнини (в случая, когато не са успоредни). Аналогично, правата g "пробожда" равнината α в случая $g \parallel \alpha$, при който двете или нямат общи точки, или пък са инцидентни $g \subset \alpha$. Още по-интересно е когато разгледаме две прави в пространството. Нека например g е определена от направляващия си вектор $\mathbf{t}$ и координатите на някоя точка $A \in g$, а h съответно от $\mathbf{s}$ и B. Тук имаме три възможности: правите да са успоредни, при което $\mathbf{t} \times \mathbf{s} = 0$ (като в частност може и да съвпадат), да се пресичат или да са кръстосани, което е най-общото (и най-вероятно) взаимно положение. В първите два случая те лежат в една равнина, при което имаме $\mathbf{t} \wedge \mathbf{s} \wedge \vec{AB} = 0$. Разстоянието в тези случаи се определя по различен начин: за кръстосани прави то се мери по т.нар. *ос-отсечка* (единствената права, която пресича едновременно g и h под прав ъгъл). Намираме го като проектираме вектора $\vec{AB}$ върху общия перпендикуляр $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{s}$, което дава

$$\mathrm{d}(g, h) = \frac{|\vec{AB} \cdot \mathbf{t} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{t} \times \mathbf{s}|}, \qquad \mathbf{t} \times \mathbf{s} \neq 0. \tag{0.21}$$

В случая на успоредни прави $\mathbf{t} \times \mathbf{s} = 0$, общата нормала може да бъде изразена като двойно векторно произведение, т.к. $\mathbf{t} \times \vec{AB}$ е перпендикулярен на равнината $\alpha \ni g, h$, следователно $(\mathbf{t} \times \vec{AB}) \times \mathbf{t} = \mathbf{t}^2 \vec{AB} - (\vec{AB} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}$ лежи в α и сключва прав ъгъл с $\mathbf{t} \parallel \mathbf{s}$, което дава желаното направление, и проектирайки $\vec{AB}$, получаваме

$$\mathrm{d}(g, h) = \frac{(\mathbf{t} \times \vec{AB})^2}{|(\mathbf{t} \times \vec{AB}) \times \mathbf{t}|} = |AB| \sin \measuredangle(\vec{AB}, \mathbf{t}), \qquad \mathbf{t} \times \mathbf{s} = 0. \tag{0.22}$$

Няколко примера от стереометрията

Нека разгледаме четири точки в пространството: $A(1;2;0)$, $B(2;1;3)$, $C(3;0;1)$ и $D(1;-1;2)$, като се поинтересуваме от свойствата на пирамидата и призмата, които те определят (аналогично на триъгълниците в планиметрията). Първо ще определим насочените отсечки по ръбовете на тялото, започвайки от точка A, съответно като $\vec{AB} = (1,\ -1,\ 3)^t$, $\vec{AC} = (2,\ -2,\ 1)^t$ и $\vec{AD} = (0,\ -3,\ 2)^t$. Тъй като рангът на системата е максимален, точките не лежат в една равнина, по-точно

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

което дава ориентирания обем на призмата, асоциирана с четирите точки. Тогава обема на пирамидата $ABCD$ намираме като използваме познатата връзка

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{5}{2}\cdot$$

Друг типичен проблем е да се намери разстоянието между точка D и равнината α, определена от A, B и C. Започваме с уравнението на α, зададено с (0.19) като

$$\alpha : \quad x + y - 3 = 0$$

след което разделяме на големината $|\mathbf{n}| = \sqrt{2}$ на нормалния вектор $\mathbf{n}_\alpha = (1,\ 1,\ 0)^t$ и заместваме координатите на D, за да получим $d(D, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}|1-1-3| = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot$ Друг вариант за решение е да съобразим, че търсеното разстояние е тъкмо височината h на пирамидата, която дава връзката $3V = hS$ между обема V_{ABCD}, получен по-горе, и лицето на основата $\triangle ABC$, изразена като $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{5}{\sqrt{2}}\cdot$

Следващата задача ще бъде да намерим разстоянието межру правата g, минаваща през върховете A и B, и правата h, определена от C и D. Ако използваме като направляващи вектори $\vec{AB} = (1,\ -1,\ 3)^t$ и $\vec{DC} = (2,\ 1,\ -1)^t$, и съответно изберем A и C за отправни точки, параметричните уравнения на двете прави са

$$g : \qquad x = 1 + \lambda, \quad y = 2 - \lambda, \quad z = 3\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$h : \qquad x = 3 + 2\mu, \quad y = \mu, \quad z = 1 - \mu, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Приравнявайки изразите за x, y и z по-горе, получаваме несъвместима система за параметрите λ и μ (проверете сами!), което означава, че правите не се пресичат. Тъй като те не са и успоредни, общата нормала към двете се получава като $\mathbf{n} \sim \vec{AB} \times \vec{DC}$, или след привеждане към единична дължина, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{62}}(-2,\ 7,\ 3)^t$. Проектирайки насочената отсечка, свързваща точка от едната права с точка от другата (например A и C), получаваме за разстоянието между тях $d(g, h) = \frac{15}{\sqrt{62}}\cdot$

Нека получим и уравненията на оста-отсечка ℓ - правата, която пресича g и h под прав ъгъл. Тъй като очевидно $\ell \parallel \mathbf{n}$, остава да определим само свободния член в уравнението от условието $\ell \cap g,\ \ell \cap h \neq \emptyset$. Друго възможно решение е да намерим ℓ като пресечница на две равнини: $\sigma \ni \mathbf{n}, g$ и $\psi \ni \mathbf{n}, h$. Техните нормални направления се определеят лесно с помощта на двойното векторно произведение

$$\mathbf{n}_\sigma \sim \vec{AB} \times (\vec{AB} \times \vec{DC}), \qquad \mathbf{n}_\psi \sim \vec{DC} \times (\vec{AB} \times \vec{DC})$$

и така получаваме уравненията им във вида

$$\sigma: \quad 24x + 9y - 5z = 42, \qquad \psi: \quad 5x - 2y + 8z = 23.$$

Решението на горната система ни дава за $\ell = \sigma \cap \psi$

$$\ell: \qquad x = -2\lambda, \qquad y = \frac{451}{62} + 7\lambda, \qquad z = \frac{291}{62} + 3\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

При този подход автоматично получаваме нормалното направление $\mathbf{n} \sim (-2,\ 7,\ 3)^t$ и разстоянието $d(g,h) = |\vec{GH}|$, измерено между точките[2] $G = \ell \cap g$ и $H = \ell \cap H$.

Задачи

1. Дадени са точките $A(-2;-1;2)$, $B(0;1;2)$, $C(1;2;0)$ и $D(3;-1;1)$. Намерете точка E, така че $ABCE$ да бъде успоредник и пресметнете лицето му. Намерете разстоянието между B и равнината α, определена от A, B и C.

2. При дадени $A(-4;-1;2)$ и $B(3;5;-16)$, намерете точка C, така че средата M на AC да лежи на оста OY, а средата N на BC - в равнината XOZ.

3. Получете уравнението на равнина α, която съдържа $A(3;4;0)$ и правата
$$g: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}.$$
Намерете и разстоянието от A до g.

4. Намерете върховете C и D на квадрат $ABCD$ при зададени $A(1;4;-3)$ и $B(1;1;1)$, ако $ABCD$ лежи в равнина, нормална на $\alpha: x + 3y - 4z + 1 = 0$.

5. Нека са дадени $A(0;-1;3)$, $B(2;1;-2)$, $C(0;3;1)$ и $D(-1;5;3)$. Намерете обема на пирамидата $ABCD$ и косинуса на $\measuredangle CAB$. Получете уравнението на правата g през върха D и успоредна на $\vec{AB}$.

6. При зададени $A(3;-1;2)$, $B(2;1;2)$, $C(0;2;0)$ и $D(1;1;1)$, намерете геометричния център на пирамидата $ABCD$, лицето на $\triangle ABC$ и ортогоналната проекция на върха D в равнината α, определена от A, B и C.

7. Нека $A(2;-1;2)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-2;3)$ и $D(1;0;1)$. Намерете лицето на $\triangle BCD$, косинуса на $\measuredangle BAD$ и уравнението на равнина α, съдържаща отсечката AB и успоредна на CD.

[2]проверете сами дали се получава същият резултат.