бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА УАСГ

12 юни 2020 г.

Вариант 1

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Б	Г	В	В	В

Задача 1. (1 т.) Ако $x = -\sqrt{x^2}$, то
а) $x \geq 0$; б) $x \leq 0$; в) само $x = 0$; г) x може да е всяко число.

Решение: От $\sqrt{x^2} \geq 0$ следва, че x трябва да бъде неположително.

Задача 2. (1 т.) Ако $\lg 2, \lg(3^x - 3), \lg(3^x + 1)$ в посочения ред образуват аритметична прогресия, то x е:
а) 2; б) $\log_3 5$; в) 3; г) $\log_3 7$.

Решение: С непосредствена проверка се вижда, че за $x = \log_3 7$ дадените числа образуват аритметична прогресия.

Задача 3. (1 т.) Стойността на израза $(1 - \operatorname{tg} 67^\circ)(1 - \operatorname{tg} 68^\circ)$ е:
а) -1; б) -2; в) 2; г) 1.

Решение: От $-1 = \operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(67^\circ + 68^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg} 67^\circ + \operatorname{tg} 68^\circ}{1 - \operatorname{tg} 67^\circ \operatorname{tg} 68^\circ}$ се получава, че търсената стойност е 2.

Задача 4. (1 т.) Триъгълникът ABC е равнобедрен с основа $AB = 16$ и височина CH към основата, равна на 7. Ъгълът при върха C е:
а) остър; б) прав; в) тъп; г) нито един от предходните.

Решение: При стандартните означения $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{8}{7} > 1$, следователно $\dfrac{\gamma}{2} > 45^\circ$ и $\gamma > 90^\circ$.

Задача 5. (1 т.) Основа на пирамидата $ABCD$ е правоъгълният $\triangle ABC$ с хипотенуза AB. Околните ръбове са равни на AB. Тогава те сключват с основата ъгъл

а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

Решение: Тъй като околните ръбове са равни, върхът на пирамидата се проектира в центъра на описаната около основата окръжност. В случая това е средата O на хипотенузата AB. Тогава по дефиниция търсеният ъгъл е $\sphericalangle DAO = 60^\circ$.

Задача 6. (5 т.) Дадена е функцията

$$f(x) = x^2 - (4a+1)x - 4a - 2,$$

където a е параметър.

а) (1 т.) За $a = \dfrac{1}{4}$ да се пресметне разстоянието от върха на графиката на функцията до началото на координатната система.

б) (2 т.) За кои стойности на a уравнението $f(x^2) = 3 - 5a$ има четири решения?

в) (2 т.) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x) = 0$ и $x_1 < x_2$, за кои стойности на a

$$x_1 + x_2 \le -6\frac{x_1}{x_2}?$$

Решение: а) За $a = \dfrac{1}{4}$ функцията е $f(x) = x^2 - 2x - 3$ и върхът на графиката ѝ има координати $(1, -4)$. Тогава той се намира на разстояние $\sqrt{17}$ от началото на координатната система.

б) За да има уравнението $x^4 - (4a+1)x^2 + a - 5 = 0$ четири решения, е достатъчно уравнението $y^2 - (4a+1)y + a - 5 = 0$, $y = x^2$, да има два различни положителни корена. Така получаваме следната система от условия за a: $\begin{vmatrix} D = (4a+1)^2 - 4(a-5) > 0 \\ 4a+1 > 0 \\ a - 5 > 0 \end{vmatrix}$, която има решение $a > 5$.

в) Корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ са -1 и $4a+2$. Ако $x_1 = -1$, то $a > -\dfrac{3}{4}$ и търсените стойности за a са $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right]$. Ако $x_1 = 4a+2$, то $a < -\dfrac{3}{4}$ и лесно се вижда, че няма такива стойности на a, които да удовлетворяват даденото неравенство. Така окончателно получаваме, че $a \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right]$.

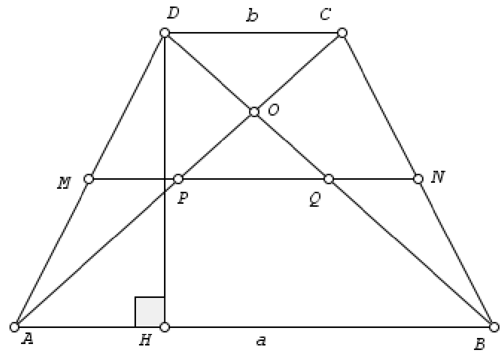
Задача 7. (5 т.) В трапеца $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $AB > CD$. Средната основа MN на трапеца пресича AC и BD съответно в точките P и Q.

а) (1,5 т.) Ако DH е височината на трапеца и $AH = PQ$, докажете, че трапецът е равнобедрен.

б) (1,5 т.) Известно е, че $S_{\triangle AOB}, S_{\triangle COD}, S_{\triangle POQ}$ в посочения ред образуват геометрична прогресия, където O е пресечната точка на диагоналите. Докажете, че $AB = 2CD$.

в) (2 т.) Ако трапецът е вписан и описан и $AB = 2CD$, пресметнете отношението на радиусите на вписаната и описаната окръжност.

Решение:



Черт. 1

а) Нека $AB = a$, а $CD = b$. Тогава $PQ = \dfrac{a-b}{2}$. От $AH = PQ$ следва, че $BH = \dfrac{a+b}{2} = MN$, което показва, че трапецът е равнобедрен.

б) От условието следва, че $\dfrac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle AOB}} = \dfrac{S_{\triangle POQ}}{S_{\triangle COD}}$. Тъй като тези триъгълници са подобни, това равенство изразено чрез коефициентите на подобие дава $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{(a-b)^2}{4b^2}$, откъдето $a^2 - ab - 2b^2 = 0$ или $a = 2b$.

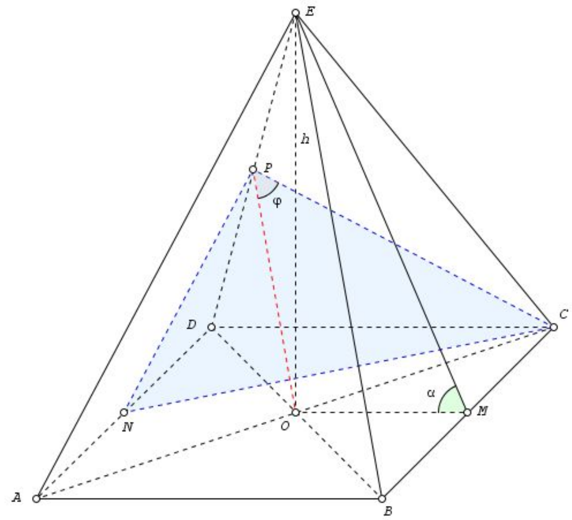
в) От условието следва, че $AD = BH = \dfrac{3b}{2}$ и $DH = 2r = b\sqrt{2}$. По синусова теорема за $\triangle ABD$ $R = \dfrac{BD}{2\sin\sphericalangle DAB} = \dfrac{3b\sqrt{34}}{16}$, откъдето $\dfrac{r}{R} = \dfrac{8}{3\sqrt{17}}$.

Задача 8. (5 т.) Височината на правилна четириъгълна пирамида $ABCDE$ с основа $ABCD$ е h, а ъгълът между околна стена и основата е α.
а) (1 т.) Да се пресметне обемът на пирамидата.

б) (2 т.) Ако N е средата на AD, а P е средата на DE, да се намери лицето на сечението на равнината (CNP) с пирамидата.

в) (2 т.) Да се пресметне косинусът на ъгъла между правите CP и BE.

Решение: а) Нека O е центърът на основата ($ABCD$) на пирамидата. Ако M е средата на BC, то OM и EM са перпендикулярни на BC и $\sphericalangle OME = \alpha$. Тогава основният ръб $a = 2h\operatorname{cotg}\alpha$ и за обема получаваме $V_{ABCDE} = \dfrac{4}{3}h^3\operatorname{cotg}^2\alpha$.



б) Ще намерим страните на сечението CNP. Последователно получаваме:

$EN = EM = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, околният ръб е $\dfrac{h\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}$, $NP = \dfrac{h\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{2\sin\alpha}$, $CN = h\sqrt{5}\operatorname{cotg}\alpha$.

По формулата за медиана в триъгълник $CP = \dfrac{h\sqrt{1+9\cos^2\alpha}}{2\sin\alpha}$. Стандартно се получава

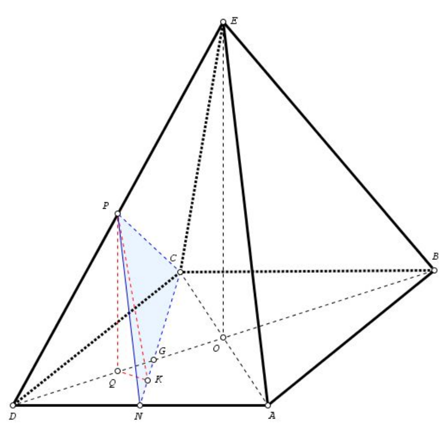
$\sin\sphericalangle CPN = 2\cos\alpha\sqrt{\dfrac{5-4\cos^2\alpha}{1+10\cos^2\alpha+9\cos^4\alpha}}$, откъдето $S_{\triangle CNP} = \dfrac{h^2\cos\alpha}{4\sin^2\alpha}\sqrt{5-4\cos^2\alpha}$.

в) Тъй като $PO \parallel BE$, то търсеният ъгъл е $\varphi = \sphericalangle OPC$. Понеже $\triangle CPO$ е правоъгълен и $PO = \dfrac{1}{2}BE$, то $\cos\varphi = \dfrac{PO}{CP} = \sqrt{\dfrac{1+\cos^2\alpha}{1+9\cos^2\alpha}}$.

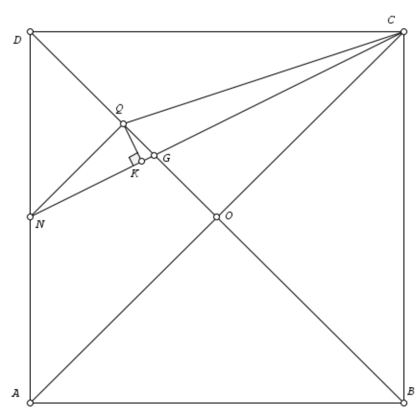
Ясно е, че лицето на сечението може да се намери и по Хероновата формула след като сме намерили трите му страни.

Друг известен подход (виж черт. 2 и черт. 3) е да се намери косинусът на ъгъла между равнината на сечението и равнината на основата. Нека Q е проекцията на точката P в равнината на основата и $QK \perp CN, K \in CN$. Тогава ъгълът между равнината (CNP) и основата е $\sphericalangle PKQ$.

Последователно получаваме $QK = \dfrac{h\sqrt{5}\cos\alpha}{10\sin\alpha}$, $PK = \dfrac{h\sqrt{5-4\cos^2\alpha}}{2\sqrt{5}\sin\alpha}$ и $\cos\sphericalangle PKQ = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{5-4\cos^2\alpha}}$. Тъй като $\triangle CNQ$ е проекцията на сечението в основата и $S_{\triangle CNQ} = \dfrac{h^2\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}$, то $S_{\triangle CNP} = \dfrac{S_{\triangle CNQ}}{\cos\sphericalangle PKQ}$.



Черт. 2



Черт. 3