

Обобщено представяне на задачата за определяне на елементите на външното ориентиране като вид пространствена трансформация по опорни точки.

Автор: Пламен Малджански

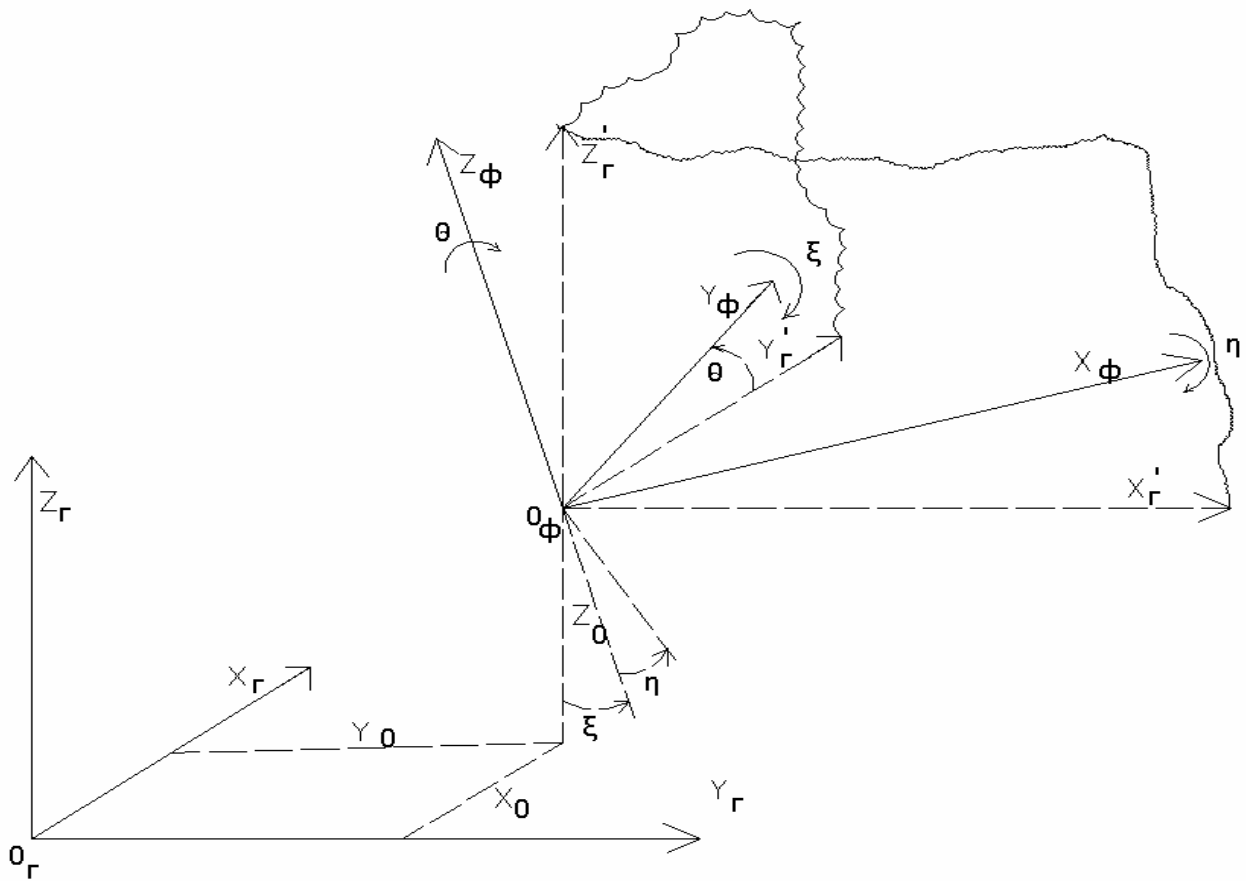
SUMMARY

The elements of exterior orientation are considered as aspect space transformation. The positions of coefficient of homothetic as in a peculiar manner of unknown scale at the exterior orientation are showed. The algorithms and decisions are indicated.

РЕЗЮМЕ

Разглежда се външното ориентиране като вид пространствена трансформация. Разкрива се ролята на коефициент на на Хомотетия като своеобразно мащабно неизвестно при външното ориентиране. Посочват се алгоритми за оптимизиране на решението.

Често срещани задачи при редица построения на модели и етапи от процесите на ориентиране в аналитичната фотограметрия са координатните преобразования (трансформации) между използваните координатни системи. Така например при аналитичното определяне на елементите на външното ориентиране (фиг.1) за въздушна снимка



(фиг.1)

често срещана задача е: при известни фотограмметрични координати (координатна система $O_\phi X_\phi Y_\phi Z_\phi$) и геодезически координати (координатна система $O_G X_G Y_G Z_G$) на общи точки да се определят трансформационните параметри и да се трансформират фотограмметричните координати на останалите точки от модела в геодезическата координатна система. (Задачата е известна още като “Аналитично определяне на елементите на външното ориентиране” [1.стр.287,\$112],[2, стр.32,33]).

Съгласно [3.ГЛАВА I,(форм.46)] връзките при тримерни линейни трансформации (преобразуване на $O_\phi X_\phi Y_\phi Z_\phi \rightarrow O_G X_G Y_G Z_G$) се дава с матрицата на преобразуване (4x4) от вида:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

където $\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = A_{\xi\eta\theta}$ е ротационната матрица между двете координатни

системи, чийто елементи са функции на ъгловите елементи на външното ориентиране;

$[r_{30} \ r_{31} \ r_{32}]$ са трансляционните параметри $[X_0 \ Y_0 \ Z_0]$ (координатите на началото на фотограмметричната моделна система в геодезическата).

За много практически задачи елементите $\begin{bmatrix} r_{03} \\ r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ се приемат с означените

стойности, като смисълът им е да отразяват разликите в мащабните нараствания по съответните координатни оси за разглежданите системи.

r_{03} -показва измененията по оста X,

r_{03} r_{13} -по оста Y и r_{23} -по оста Z;

r_{03} r_{33} се приема за 1 , което довежда до еднакви мащабни нараствания по всички координатни оси и се нарича коефициент на хомотетия. В смисъл на казаното по-горе координатното преобразуване може да се сведе до следните трансформационни формули (2):

$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{H} \cdot [X_\phi \quad Y_\phi \quad Z_\phi \quad H] \cdot \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & 0 \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & 0 \\ X_0 & Y_0 & Z_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Може да се каже ,че вектора $[X_\phi \quad Y_\phi \quad Z_\phi \quad H]$ с фотограметрични координати, е вектор, описващ положението на точка във фотограметричната координатна система, разглеждан обаче в едно четиримерно пространство . Четвъртата координата H е реално число, такова, че след операцията с трансляционната матрица R да се преобразува във вектора с геодезически

координати $\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \\ 1 \end{bmatrix}$. В този смисъл $\frac{1}{H} = t$ се явява неизвестния мащабен

коефициент. По този начин уравнения (2) са подобни на тези от [1,стр.287,17.1], като разликата е ,че за неизвестно тук се приема коефициента на хомотетия H, а не мащабното число. Те описват процеса на абсолютното ориентиране и дават връзка между фотограметрични и геодезически координати. В тях се съдържат 7 броя независими неизвестни $\xi, \eta, \theta, H, X_0, Y_0, Z_0$. Коефициентите $r_{00}, r_{01}, r_{02}, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{20}, r_{21}, r_{22}$ са функции на ξ, η, θ и стойностите им и начина на образуване на ротационната матрица са както следва:

1.Въртене около ос X_G на ъгъл ξ

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi & -\sin \xi \\ 0 & \sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix}$$

2.Въртене около ос Y_G на ъгъл η

$$A_\eta = \begin{bmatrix} \cos \eta & 0 & -\sin \eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \eta & 0 & \cos \eta \end{bmatrix}$$

3. Въртене около ос Z_Γ на ъгъл θ

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Коефициенти на ротационната матрица

$$\begin{aligned} r_{00} &= \cos \eta \cos \theta; & r_{01} &= \cos \eta \sin \theta & r_{02} &= -\sin \eta \\ r_{10} &= -\cos \xi \sin \theta - \sin \xi \sin \eta \cos \theta & r_{11} &= \cos \xi \cos \theta - \sin \eta \sin \xi \sin \theta & r_{12} &= \sin \xi \cos \eta \\ r_{20} &= \sin \xi \sin \theta - \cos \xi \sin \eta \cos \theta & r_{21} &= \cos \xi \cos \theta - \sin \eta \sin \xi \sin \theta & r_{22} &= \cos \xi \cos \eta \end{aligned} \quad (3)$$

Те се отличават от [1.стр.287,форм.17.2] ,защото се отнасят за ляво-ориентирана геодезическа координатна система (фиг.1).

След заместване в (2) се получават (4), които могат да се разглеждат като уравнения на измерванията при организиране на един итерационен процес и параметрично изравнение:

$$\begin{aligned} X_\Gamma &= \frac{X_\phi}{H} r_{00} + \frac{Y_\phi}{H} r_{10} + \frac{Z_\phi}{H} r_{20} + \frac{X_0}{H} \\ Y_\Gamma &= \frac{X_\phi}{H} r_{10} + \frac{Y_\phi}{H} r_{11} + \frac{Z_\phi}{H} r_{12} + \frac{Y_0}{H} \\ X_\Gamma &= \frac{X_\phi}{H} r_{20} + \frac{Y_\phi}{H} r_{21} + \frac{Z_\phi}{H} r_{22} + \frac{Z_0}{H} \end{aligned} \quad (4)$$

Като се приложи метода на функционалната итерация (метод на Нютон) може да се стигне до уравнения (5) и уравнения на поправките (6) за едно параметрично изравнение.

$$\begin{aligned} X_\Gamma &= X_\Gamma' + \frac{\partial X_\Gamma}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial X_\Gamma}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial X_\Gamma}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial X_\Gamma}{\partial H} \delta H + \frac{\partial X_\Gamma}{\partial X_0} \\ Y_\Gamma &= Y_\Gamma' + \frac{\partial Y_\Gamma}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial Y_\Gamma}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial Y_\Gamma}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial Y_\Gamma}{\partial H} \delta H + \frac{\partial Y_\Gamma}{\partial Y_0} \\ Z_\Gamma &= Z_\Gamma' + \frac{\partial Z_\Gamma}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial Z_\Gamma}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial Z_\Gamma}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial Z_\Gamma}{\partial H} \delta H + \frac{\partial Z_\Gamma}{\partial Z_0} \end{aligned} \quad (5)$$

,където неизвестните елементи на външното ориентиране са представени като приблизителна стойност + поправка ($X_i = X_i + \delta X_i$)

$$\begin{aligned} V_X &= A_\xi \delta \xi + A_\eta \delta \eta + A_\theta \delta \theta + A_H \delta H + A_{X_0} \delta X_0 + L_X \\ V_Y &= B_\xi \delta \xi + B_\eta \delta \eta + B_\theta \delta \theta + B_H \delta H + B_{Y_0} \delta Y_0 + L_Y \\ V_Z &= C_\xi \delta \xi + C_\eta \delta \eta + C_\theta \delta \theta + C_H \delta H + C_{Z_0} \delta Z_0 + L_Z \end{aligned} \quad (6)$$

Всяка точка която има X,Y,Z координати в двете координатни системи дава три уравнения на поправките от вида (6). Стойностите на коефициентите пред поправките на неизвестните са:

$$\begin{aligned}
 A_{\xi} &= \frac{\partial X_{\Gamma}}{\partial \xi} = -\frac{1}{H}(r_{20}X_{\phi} - r_{00}Z_{\phi}) & A_{\eta} &= \frac{\partial X_{\Gamma}}{\partial \eta} = -\frac{1}{H}(X_{\phi}tg\eta + (Y_{\phi}r_{12} + Z_{\phi}r_{22})\cos\theta) \\
 A_{\theta} &= \frac{\partial X_{\Gamma}}{\partial \theta} = \frac{1}{H}(r_{11}Y_{\phi} - r_{01}X_{\phi}) & A_H &= \frac{\partial X_{\Gamma}}{\partial H} = \frac{1}{H}X_{\Gamma}' & A_{X_0} &= \frac{\partial X_{\Gamma}}{\partial X_0} = \frac{1}{H} \\
 L_X &= X_{\Gamma}' - (X_{\Gamma})_{изч} \\
 B_{\xi} &= \frac{\partial Y_{\Gamma}}{\partial \xi} = -\frac{1}{H}(r_{21}Y_{\phi} - r_{11}Z_{\phi}) \\
 B_{\eta} &= \frac{\partial Y_{\Gamma}}{\partial \eta} = -\frac{X_{\phi}}{H}\sin\eta\sin\theta - \frac{Y_{\phi}}{H}\cos\eta\sin\xi\sin\theta - \frac{Z_{\phi}}{H}\cos\xi\cos\eta\sin\theta \\
 B_{\theta} &= \frac{\partial Y_{\Gamma}}{\partial \theta} = \frac{1}{H}(r_{00}X_{\phi} + r_{10}Y_{\phi} + r_{20}Z_{\phi}) \\
 B_H &= \frac{\partial Y_{\Gamma}}{\partial H} = \frac{1}{H}Y_{\Gamma}' & B_{X_0} &= \frac{\partial Y_{\Gamma}}{\partial X_0} = \frac{1}{H} \\
 L_Y &= Y_{\Gamma}' - (Y_{\Gamma})_{изч} \\
 C_{\xi} &= \frac{\partial Z_{\Gamma}}{\partial \xi} = -\frac{1}{H}(r_{22}Y_{\phi} - r_{12}Z_{\phi}) \\
 C_{\eta} &= \frac{\partial Z_{\Gamma}}{\partial \eta} = -\frac{X_{\phi}}{H}\cos\eta - \frac{Y_{\phi}}{H}\sin\eta\sin\xi - \frac{Z_{\phi}}{H}\cos\xi\sin\eta \\
 C_{\theta} &= \frac{\partial Z_{\Gamma}}{\partial \theta} = 0 & C_H &= \frac{\partial Z_{\Gamma}}{\partial H} = \frac{1}{H}Z_{\Gamma}' & C_{X_0} &= \frac{\partial Z_{\Gamma}}{\partial X_0} = \frac{1}{H}
 \end{aligned} \tag{7}$$

При $\xi = 0; \eta = 0; \theta = 0$ (начално приближение) от (4) се стига до (8):

$$\begin{aligned}
 X_{\Gamma} &= \frac{X_{\phi}}{H} + \frac{X_0}{H} = \frac{1}{H}(X_{\phi} + X_0) & Y_{\Gamma} &= \frac{Y_{\phi}}{H} + \frac{Y_0}{H} = \frac{1}{H}(Y_{\phi} + Y_0) \\
 Z_{\Gamma} &= \frac{Z_{\phi}}{H} + \frac{Z_0}{H} = \frac{1}{H}(Z_{\phi} + Z_0)
 \end{aligned} \tag{8}$$

тоест при ортогонални трансформации между двете координатни системи $\frac{1}{H}$ се явява мащабен фактор.

Горното твърдение илюстрира , че с приемане за неизвесно коефициента на хомотетия, вместо мащабното число се постига едно по-голямо обобщение на разглеждането.

От уравнения (6) , ъгловите стойности на неизвестните и коефициента на хомотетия се съдържат във всички координатни уравнения, докато неизвестните координати на началото на фотограметричната система се срещат епизодично, в зависимост на вида уравнение (за X,Y или Z). Това е причината да съществуват начини за разделно определяне на трансформационните параметри (първо се определят ъгловите, а след това останалите), на които няма да се спираме.

Последващата обработка по МНМК (Метод на най-малките квадрати) може да стане както по преки (без образуване на нормална система), така и по непреки (с образуване на нормална система) начини [4].

Ще се спра от непреките методи на метода на Холецки-Банахевич-Златанов, (алгоритъм Z) водещ до възможности за съкратен запис както на уравненията на поправките, така и на нормалната система. Изчислителния процес може да се организира с използване на релационна база от индексирани и свързани таблици и чрез актуализиране и промяна на съдържанието им от СУБД (система за управление на база данни) да се постигне по-голяма ефективност и прозрачност на изчислителния процес [3.Глави IV,V]

Матричният запис на уравненията на поправките (6) е:

$$V = B \bar{X} + F, \text{ n-брой измервания; m-брой неизвестни, при}$$

корелационна матрица $Q_F = Q_L$, $Rang(B) = m$, $Rang(Q_L) = n$ ([4.стр.66])

При прилагане на Алгоритъм Z се образува матрицата Z във вида:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ & Z_{22} & Z_{23} \\ & & Z_{33} \end{bmatrix}, q = m + n + 1;$$

$$Z_{11} = N = (B^t Q_L^{-1} B), \quad Z_{12} = M = (B^t Q_L^{-1} F) \quad Z_{13} = B^t \quad Z_{22} = F^t Q_L^{-1} F \quad Z_{23} = F^t \quad Z_{33} = 0$$

(9)

Коефициентите в уравненията на поправките (матрицата B) са получени по формули (6) и имайки предвид, че в зависимост от вида уравнение (по X, Y или Z) се получават най-много б не нулеви елемента (пет за неизвестните и един за свободния член) за всяко уравнение на поправките, можем да използваме едномерен масив и да изчисляваме участието на всяко уравнение при образуване на нормалната система и оттам и на матрицата Z, съхранението на която обикновено е в едномерен масив (фиг.2) и достъпът до елементи от този масив е удачно да се извършва чрез използване на множество от {базови} и {колонни} адреси ([3, ГЛАВА V]). Удачно е следното подреждане на неизвестните:

Текущо уравнение на поправките

Vx	$\delta \xi$	$\delta \eta$	$\delta \Theta$	δH	δX_0	L_x
Vy	$\delta \xi$	$\delta \eta$	$\delta \Theta$	δH	δY_0	L_y
Vz	$\delta \xi$	$\delta \eta$	$\delta \Theta$	δH	δZ_0	L_z

едномерен масив B[0..5] за запис на текущото уравнение на поправките

(фиг.2)

Достъпът до елемент от съкратения запис на матрицата Z в едномерен масив [5.стр.65, форм.2.3.33] се дава с изчисляване на индекса от масива IJ

$$IJ = (i - 1) \cdot (2 \cdot (U + 1) - i) / 2 + j \quad (10)$$

при I-реда и J- стълба;

Множеството на индексите на колонните адреси [5,Глава V] в случая ще бъде:

При уравнения за X-координатата:

$$\{\text{множество колонни адреси}\} = \{J1=1, J2=2, J3=3, J4=4, J5=5, JM=6\}$$

При уравнения за Y-координатата:

$$\{\text{множество колонни адреси}\} = \{J1=1, J2=2, J3=3, J4=4, J5=6, JM=6\} \quad (11)$$

При уравнения за Z-координатата:

$$\{\text{множество колонни адреси}\} = \{J1=1, J2=2, J3=3, J4=4, J5=7, JM=6\}$$

Базовият адрес ще се определя от текущата стойност за реда I на матрицата Z в случай , че разглеждането се прави за определяне елементи на външно ориентиране или параметри на трансформация за един модел(реален или фиктивен) .

$$\{\text{базов адрес}\} = (i - 1) \cdot (2 \cdot (U + 1) - i) / 2 \quad (12)$$

Под модел може да се разбира снимка или група от снимки. Ако целта е в отделни зони (снимки) да се определят различни трансформационни параметри то тогава базовите адреси ще се пресмятат като във формули (10)

На мястото на I се постави съответния колонен индекс (J1.. JM)

$$\{\text{адрес на елемент}\} = \{\text{базов}\} + \{\text{колонен}\} \quad (13)$$

Същността на Z-алгоритъма се състои в последователно преобразуване на матрицата Z, за целта се използват формули (14):

$$Z_{kk}^{(k)} = +\sqrt{Z_{kk}^{(k-1)}} \quad Z_{kj}^{(k)} = Z_{kj}^{(k-1)} / Z_{kk}^{(k)}, j = \overline{k+1, q}$$

$$Z_{ij}^{(k)} = Z_{ij}^{(k-1)} - Z_{ki}^{(k)} Z_{kj}^{(k)}, i = \overline{k+1, q}, j = \overline{i, q} \quad (14)$$

След m-редукции за Z се получава:

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} R & \rho & B^t \\ - & V^t Q_L^{-1} V & V^t \\ - & - & Q_L \end{bmatrix}, \bar{R} = \begin{bmatrix} R & \rho \\ - & 1 \end{bmatrix}, \bar{R}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & X \\ - & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Релационната матрица за неизвестните Q_x се изчислява по формулата:

$$Q_x = R^{-1} R^{-1} \quad (16)$$

Определянето на неизвестните трансформационни параметри, които в случая са и елементите на външното ориентиране по метода на функционалната итерация се извършва като се налага критерий (допуск) за сходимост при решението. Най –често това е разликата в относителните грешки на неизвестните от две последващи итерации. (Приема се тя да е по-малка от число, съизмеримо с точността на входните данни).

За приблизителни стойности на неизвестните при началната итерация могат да се приемат :

1. нули за ъгловите елементи;
2. единица за H ;
3. и по формули (8) да се получат началните стойности за X_0, Y_0, Z_0 .

Необходимо е също така да се работи с нормирани поправки, като за целта се извърши нормиране, чрез изравняване на дименсийте по координатните оси от двете координатни системи (фотограметрична и геодезическа), както и да се редуцират спрямо центровете на тежестта (средноаритметичното), координатите от двете координатни системи.

След определяне на трансформационните параметри за модела, по формули (4) могат да се изчислят геодезическите координати на всички точки от модела.

ЛИТЕРАТУРА:

- [1] **ЛОБАНОВ, А.Н.** Фотограметрия, НЕДРА, 1984
- [2] **ЛОБАНОВ, А.,Н.,БУРОВ,М.,И.,** . Фотограметрия, НЕДРА, 1987
- [3] **Малджански, Пл. Б.,** Използване на релационна база от данни при фотограметрични построения-ДИСЕРТАЦИЯ,1998.
- [4] **Златанов, Г.,**Обобщение на метода на най-малките квадрати за изравнение на нормално разпределени измервания,София,1996.
- [5]**Златанов,Г.,** Електронно-изчислителна техника в геодезията,ТЕХНИКА,1979