**VI-та Международна Научна Конференция**
**Съвременно управление на минното производство, геологията и опазването на околната среда SGEM 2006**
**Научно направление „ Информатика и геоинформатика”.**

# Използване на динамични структури за съкратен запис на големи матрици.

(автор: доц.д-р.,инж. Пламен Малджански)

**Резюме**

Съпоставят се възможностите за съкратен запис на големи матрици чрез използване на статични и динамични структури. Разгледани са разпространените алгоритми за решаване на големи линейни системи и начините за съкратен(пакетиран) запис на матрици , използвани в тях. Описват се особености за представяне в пакетен вид на големи матрици и ефективността на алгоритмите при реализиране чрез динамични и статични структури. Посочват се примери от реализирани програмни системи при анализ и обработка на геодезически данни.

## Usage of dynamic structures for short record of large matrices

(by Plamen Maldzhanski)

**Summery**

The possibilities for a short record of large matrices by using static and dynamic structures are compared. The algorithms for solving linear systems and the ways for short record of the matrices used in them are observed. Special ways for presenting matrices as packages and the efficiency of the algorithms when realized with the help of dynamic and static structures are described. Examples of realized program systems are shown when analyzing geodesic data.

**Използване на динамични структури за съкратен запис на големи матрици.**
(автор: доц.д-р.,инж. Пламен Малджански)

Повечето практически задачи в геодезическата и фотограметрична практика са свързани с използване на големи матрици и прилагане на подходящи алгоритми за пакетиране и съкратен запис на тези матрици в паметта. Такива са случайте на изравнение на големи геодезически и фотограетрични мрежи. По разпространени и прилагани в практиката методи за решаване на линейни системи са:

- **Методът на Гаус.** Това е директен метод , явяващ се основен за решаване на системи с т.н. "*съхраняеми*" матрици. Това означава, че броят на уравненията не е много голям (типично не по-голям от няколко стотин), така че всичките $\mathbf{n^2}$ коефициенти да могат да се пазят едновременно в паметта. Този метод се нарича още метод на елиминирането защото от уравненията последователно се изключват неизвестните **x**.
- **Метод на Гаус-Жордан**, наричан още само метод на Жордан, е една модификация на метода на Гаус, при която решението на системата се получава в резултат на правия ход на задачата, без да има нужда от обратен ход.

При метода на Гаус изходната матрица последователно се преобразува, така че в резултат на правия ход се получава горна триъгълна матрица. При правия ход се получава матрица, чийто елементи са различни от нула само по главния диагонал(1):

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + .....0 + ............0 = b_1 \\ &0.........a_{22}x_2 + ..........0 = b_2 \\ &............................................. \\ &0.........0..............a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

Този вид на матрицата се постига като на k-тата стъпка неизвестната величина $\mathbf{x_k}$ се изключва от всички уравнения с изключение на $\mathbf{k}^{\mathbf{-тото}}$ използвайки множителите:
$\mathbf{m_i=a_{ik}/a_{kk}}$**,** $\mathbf{i=1,..n}$**;** $\mathbf{a_{ij}=a_{ij}-m_i a_{kj}}$ **и** $\mathbf{b_i=b_i-m_i b_k}$.

Както и в метода на Гаус, коефициентите $\mathbf{a_{ij}}$ и $\mathbf{b_i}$ не са първоначалните, а са получени в резултат на предишни преобразования. Както се вижда, основната разлика от метода на Гаус е, че елиминацията на коефициентите пред неизвестните се извършва за всички уравнения с изключение на това, където неизвестното участва в диагоналния елемент. Поради това (1) има особено прост вид и решението е(2):

$$x_k = \frac{b_k}{a_{kk}}, \ k=1\ldots N. \qquad (2)$$

Методът на Гаус-Жордан се прилага само с избор на главен елемент защото за него са в сила същите разсъждения както и за метода на Гаус. Що се отнася до ефективността, то при големи **N** броят на умножения/деления е $\mathbf{N^3/2}$, което е повече от метода на Гаус, при който този брой е $\mathbf{N^3/3}$.

- **Метод на разлагането на долна и горна матрица.** При този метод изходната матрица се разлага на произведение от две матрици. Едната има елементи само по и над главния диагонал и се нарича **горна триъгълна матрица** (на английски Upper triangular matrix). Пример за горна триъгълна матрица е матрицата получена в резултат на правия ход на Гаусовата елиминация. Другата матрица има елементи само по главния дигонал и под него и се нарича долна триъгълна матрица (Lower triangular matrix). От английското му наименование идва и другото име на метода: **LU** разлагане.

  За това разлагане може да се напише, че матрицата от коефициенти пред неизвестните се явява като произведение от долна и горна триъгълна матрица:

$$L \cdot U = A \,. \tag{3}$$

За да се реши системата линейни уравнения (3) би следвало:

$$A \cdot x = b \,. \tag{4}$$

Замествайки (3) в (4) получаваме:

$$A \cdot x = (L \cdot U) \cdot x = L \cdot (U \cdot x) = b \,. \tag{5}$$

Да отбележим, че:

$$U \cdot x = y \,. \tag{6}$$

Тогава:

$$L \cdot y = b \,. \tag{7}$$

Системата (7) е една нова система от линейни уравнения, която поради особения вид на L може лесно да се реши.При това при разлагането на матрицата A на долна и горна триъгълни матрици свободните членове b не участват. Това означава, че веднъж намерени матриците L и U могат да се използват за многократно решаване на (6) с различна дясна част b. **В това се състои основното предимство на LU разлагането пред метода на Гаус.**

- **Итерационен метод на Гаус-Зайдел**

В общия случай за N линейни уравнения с N неизвестни за k-тата итерация по този метод получаваме:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - a_{iN}x_N^{(k-1)}\right) \tag{8}$$

Итерациите спират когато се постигне някаква предварително зададена точност, като най-често се използват относителните стойности, сравнявани в две последващи итерации спрямо предварително зададен допуск $\varepsilon$:

$$\max_i \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon \,. \tag{9}$$

Уравненията (8) и (9) заедно с избраните начални стойности за **x** напълно определят решението на неизродена система от линейни уравнения. Както се вижда при метода на Гаус-Зайдел, както при директния метод на Гаус, се извършва деление с диагоналните елементи. Следва, че и тук се налага частичен избор на водещ елемент. Ако се окаже, че никой от останалите диагонални елементи в дадена подматрица не е различен от нула то системата е изродена.

Често се срещат например системи с **лентови матрици**, където различни от нула са само елементите от главния диагонал и тези под и над него, като ширината на лентата определя колко точно елемента са различни от нула. При трилентовата (тридиагонална) матрица различни от нула са само елементите $x_{i,i-1}$, $x_{ii}$, и $x_{i,i+1}$. Такава система се решава особено ефективно по формули (10):

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)}\right)$$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)}\right), i \neq 1, N$$

$$x_N^{(k)} = \frac{1}{a_{NN}}\left(b_N - a_{N,N-1}x_{N-1}^{(k)}\right) \tag{10}$$

Немаловажен се оказва и фактът, че при итерационните процедури като цяло **грешката от закръгляне е по-малка**. Наистина, стойностите при всяка итерация могат да се разглеждат като приближения, които се уточняват при следващата итерация. По този начин грешката от закръгляне се акумулира само по време на последната итерация. При големи **N** броят на всички аритметични операции е приблизително **$2/3N^3$** при метода на елиминацията и **$N^2$** за една итерация при настоящия метод. Следователно при N=1000 за една итерация се извършват около 330 пъти по-малко операции отколкото при директния метод на Гаус.

- **Лошо обусловени матрици.**

Резултатите от теорията на системи от линейни уравнения показват, че една система е или изродена или не. При пресмятанията обаче е важен случаят, когато детерминантата на системата е много малко число. В този случай казваме, системата е почти изродена. Поради грешки от закръгляне може да е окаже, че получените резултати за такива системи са напълно погрешни.

Широко разпространени в алгоритмичната теория и практика са случайте на представяне на разредените елементи на големите матрици като подходящо структурирани масиви в статични по отношение на използваната машинна памет структури. Така например в "**Библиотеки численного анализа БЧА НИВЦ МГУ**" се използват следните основни формати за съкратен(пакетиран) запис на големи матрици, базиращи се на използване на статични структури (масиви):

- **формат RR(C)O**. Съкратеното название произлиза от съчетанието "Row - wise Representation Complete and Ordered" (поредово представяне, пълно и подредено). При този случай вместо един двумерен масив, се използват три едномерни: масив за съхранение на ненулевите елементи на матрицата и два други за запис на индексите на стълбовете и указателите на реда за всеки елемент;
- **формат RR(C)U.** Съкратеното название произтича от английското "Row - wise Representation Complete and Unordered" (редово представяне, пълно и неподредено). Формата *RR(C)U* се отличава от *RR(C)O* по това че осъществява подреждането по редове, но вътре във всеки ред елементите не са подредени.

Неудобството на статични структури при пакетиране на матрици се явява обстоятелството, че все пак за големи задачи са необходими големи непрекъснати области от паметта Едно ефективно решение е използването на *динамични структури* (релационни таблици) и осигуряване на бърз и ефективен алгоритмичен достъп до съответните елементи при действия с матрицата на различни етапи от изчислителните процеси.

Ако за матрицата **A(n-реда;m-стълба)** се използва за запис само на ненулевите елементи релационна таблица от вида: (фиг.1)

| I0 | I | J | A_IJ | KEY |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

(фиг.1)

,където в полетата се записват:

**I0**-редовия индекс, изчислен по формула(11), за ненулев елемент **$a_{IJ}$** от матрицата **A**:

$$I0 = (I-1)(2*m+1-I)/2 \qquad (11)$$

**I**-индекс за реда;

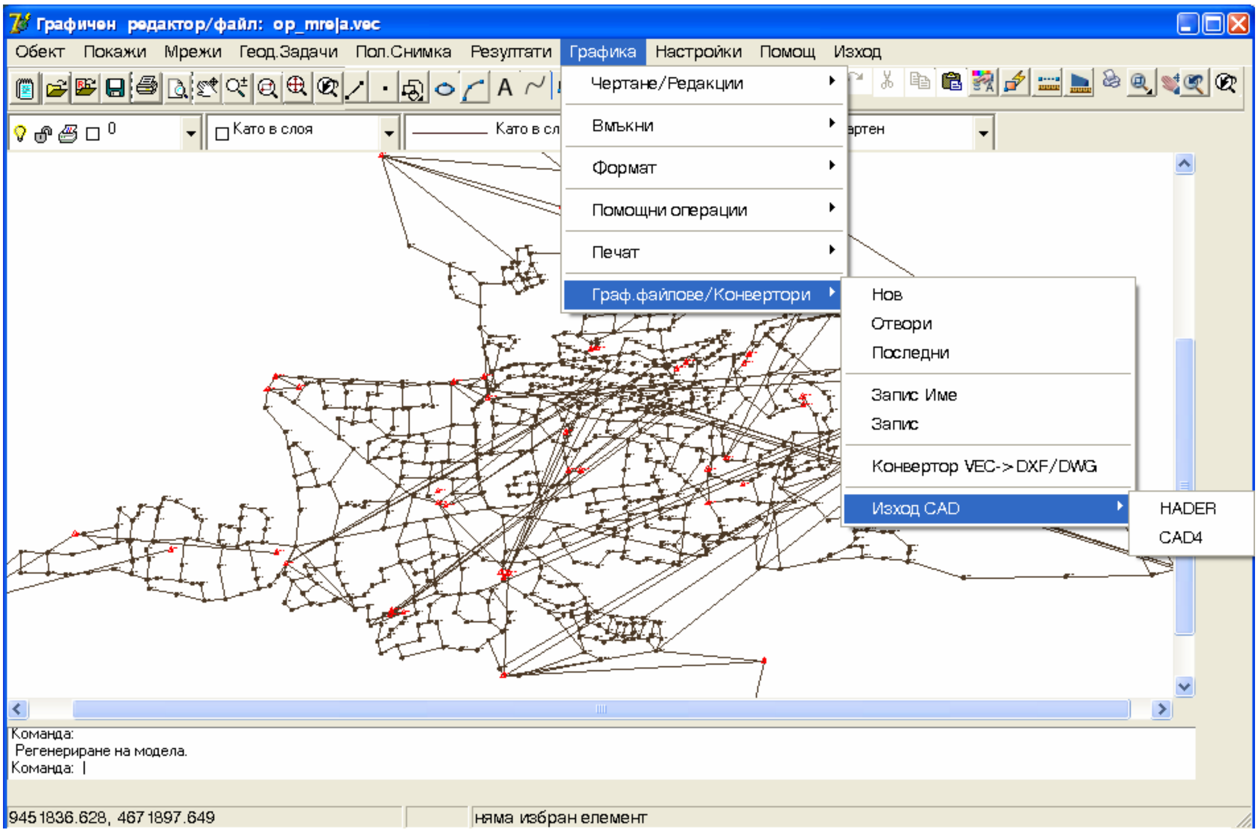
**J**-индекс за стълба;

**A_IJ**-стойността на ненулевия елемент

**KEY**-ключово поле за реализиране на подходящ алгоритмичен достъп;

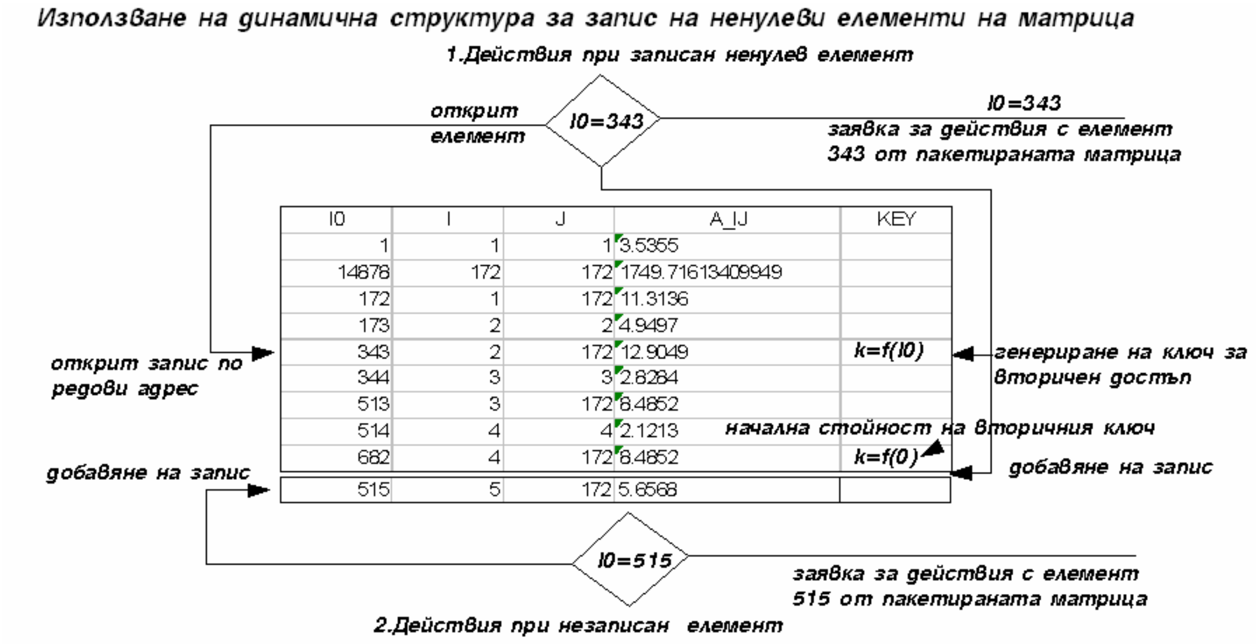
Таблицата може да се използва за съкратен (пакетиран) запис при обработка на големи матрици. Елементите се записват в неподреден вид и тя представлява динамична структура от данни .

В пакета <ГЕОДЕЗИЯ>(Програмен пакет за обработка на данни от преки геодезически измервания,фиг.2)




(фиг.2)

е използвана динамична структура за обработка на големи геодезически мрежи.Записът се осъществява само за ненулевите елементи, като едновременно се записват и индексите за ред и стълб. Записът на редови адрес , както и генериране на вторичен ключ в полето <**KEY**> позволява ускоряване на достъпа до всеки от елементите при преобразуване на матрицата. Когато в резултат на матрични операции (преобразуване или обръщане на матрица небъде открит съответния адресен елемент от пакетирания запис то просто динамичната структура се разширява като се добавя нов ред за записа. (фиг.3)




(фиг.3)

Проведени експериментални тестове с пакета <ГЕОДЕЗИЯ> показват , че при изравнение на големи мрежи е удачно използването на динамични структури за редица практически задачи с пакетирани матрици, като се постига по-голяма ефективност, бързина и възможност за ускоряване на итерационни процеси при прилагане на итерационни алгоритми. Необходимо е обаче да се използва подходяща СУБД (Система за управление на база от данни), чрез която се ускоряват процесите по търсене и вмъкване на елемен в пакетирания запис. Методът се оказва обаче по-неефективен за малки размери на матриците, сравнен с използване на статични структури (масиви).

**Изводи:**

- направени експерименти с изравнения на геодезически планови и височинни мрежи при използване на един и същи алгоритъм и различни представяния на матрици (`чрез статични и динамични структури) водят до изводи че за матрици с размери (1500х300) (планови мрежи до 300 нови точки, или височинни до 600 нови точки, както и аналитични модели за фототриангулация до 9 снимки) може да се счита , че използването на статични структури е оправдано. За по големи задачи трябва да се прилагат така наречените spark-алгоритми (алгоритми за обработка на много големи линейни алгебрични системи), където използването на динамични структури потобрява параметрите на изчислителния процес;
- удачно е системите на обработка да предостявят възможности за избор на алгоритъм за решение на линейни системи алгебрични уравнения и начин на представяне на съкратения(пакетира)запис на използваните матрици. Подобни възможности са реализирани в пакетите ГЕОДЕЗИЯ и MATLAB.

**Литература:**

[1] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, W. Veterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press

[2]  У. Дорн, А. Маккракен, *Числени методи и програмиране на Фортран IV*, Наука и изкуство, София 1977
[3]Систематический каталог Библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ

[4]Maldjanski.,Pl., Algorithm from calculate the approximately values of coordinates points from photogrammetrical analytical model, Geodesy, Cartography and Land measurement, XXXVIII,ISSN 0324-1610,GeoPres, 1998
[5]Maldjanski.,Pl., Methods for coding the information then controlling and testing geodesic data ,from direct survey, Jubilee scientific conference UASG, 2002
[6]Maldjanski.,Pl., Използване на релационна база от данни за организиране и обработка на резултати от преки геодезически измервания, International symposium “Space information –technologies, acquisition, processing and effective application”, 2002.
[7]. MATLAB. User guide-2005