Тема 1. Случайни процеси и сигнали и тяхното приложение във висшата геодезия.

1.1. Необходимост от използване на нови математически апарати.

1.2. Същност на случайните процеси и тяхното моделиране.

1.3. Същност на цифровата обработка на случайни сигнали.

1.4. Връзка с други дисциплини и области на приложение. Приложение във висшата геодезия.

1.1. Необходимост от запознаване с нови математически апарати.

Обработката на последователности от измервания изисква по-различен математически апарат за анализ и оценка на наблюдаваните величини.

Традиционно в математическата статистика се разглеждат статистически характеристики на на дискретни величини, основано на анализа на голям набор от реализации. Известни са основните статистически характеристики на дискретните величини.

В редица практически задачи се налага анализа на величини, които са функции на времето. Такива величини представляват от една страна функции на времето и имат регулярна въставна, а от друга се наслагват изкривявания, които е прието да се обозначават като шум.

Примери за такива последователности са сигнали отчитащи разстоянието до обектите в радиолокацията, при ехолотни измервания, при лазерни далекомерни измервания във висшата геодезия или при лазерните сканери.

Обработката н атакъв тип величини изисква използването на друг тип математически апарат, който да е адекватен на наблюдаваните величини.

1.2. Същност на случайните процеси и тяхното моделиране.

Приема се, че източникът изработва функция на времето, която носи случаен характер. Такава функция се явява реализация от набор функции. Множеството от такива функции, съвместно с неговия вероятностен закон се наричат ансамбъл.

Случайният процес представлява съвкупност от случайни значения, всяко от които се отнася към собствен момент на времето

$x = \{x(t), t \in T\}$

Ако T е изброимо множество, то казваме, че имаме процес с дискретно време, а ако T е непрекъснат интервал, то ь е процес с непрекъснато време.

Съвкупността отзначения не се разглежда като скаларна величина, а като вектор в Хилбертовото пространство. Параметърът t представлява точка в това пространство. За дадена система нас не ни интерсува отделнат арализация, а целият ансамбъл от сигнали. Осреднените характеристики на системата представляват математическото очакване.

По такъв начин поведението наслучайния процес във времето се характеризира споведението на различните математически очаквания като детерминирани функции на времето, но не формата на конкретния сигнал. В това се състои същественат аразлика между детерминитаните и случайните сигнали.

Тема 2. Случайни процеси.

2.1. Случайни процеси. Стационарни и нестационарни, детерминирани и недетерминирани, ергодични и неергодични случайни процеси.

2.2. Числени характеристики на случайните процеси.

2.1. Случайни процеси. Стационарни и нестационарни, детерминирани и недетерминирани, ергодични и неергодични случайни процеси.

2.1.1. Дефиниция на случаен процес

Физическите явления, които се разглеждат в инженерната практика се опоисват от функции на времето, наречени реализации на процеса.. ординнатата представлява различни величини (път, скорост, ускорение, налягане, ъгъл, температура). Абсцисата представлява друга независима величина (време, пространствена координаъта, ъгъл).

Случаен процес дефиниран на вероятностното пространство (Ω, Θ, P) се нарича семейството от случайни величини $x(t,\omega)$, зависещи от реалнич параметър t, приемащ стойности от множеството T. Самите случайни величини ь $x(t,\omega)$ могат да се явяват реални, комплексни или векторни.. Пространството X, в което $x(t,\omega)$ приема своите значения се нарича фазово пространство.на процеса.Физически явления, чиетио поведение може да средскаже от физически съображения или по данни от предишни измервания сенаричат детерминирани.. Много явления се явяват недетерминирани и всяка серия от измервания представлява специфична реализация на процеса, която няма да се повтори в бъдеще и не може да се предскаже с достатъчна точност. Такива процеси и пораждащите ги явления се наричат случайни.

2.1.2. Характеристики на случайните процеси.

При случайните процеси стойността на получаваната величина не може да се предскаже с точност, определна от грешката на измерване. Такава реализация представлява само едно събитие от множеството събития, кото които могат да се осъществяват при даден експеримент. За да се получи пълна представа за процеса е необходимо да се изхожда от свойствата на целия ансамбъл, съответстващ на изучавания процес. Случайният процес $\{x(t)\}$, описващ изучаваното явление се задава посредством ансамбъла от негови реализации $x_i(t), t = 1,2,3,...$

2.1.3. Стационарни процеси

Средните характеристики на процеса $\{x(t)\}$, зададен от ансамбъла от негови реализации може да се определи за всеки зададен момент от времето т, посредством осредняване по ансамбъла.. Така се определят средното значение и средното на квадрта на процеса.

$$\mu_x(t_j) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t_j) \quad \text{Средно значение}$$

$$\psi_x^2(t_j) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2(t_j) \quad \text{Средно квадратно значение}$$

.Средното произведение от значенията на процеса за моментите t_j и $t_j + \tau$ се нарича ковариационна функция за отместване τ и се задава с формулта

Тема 3. Автокорелационни функции.

3.1. Същност на автокорелационните функции (АКФ).

3.2. Свойства.

3.3. Определяне на АКФ. Примери.

3.1. Същност на автокорелационните функции (АКФ).

Корелационните функции се определят за определени моменти от времето $t_1 = t$ и $t_2 = t + \tau$.

Автокорелационните функции за два случайни процеса са съответно:

$$C_{xx}(t, t+\tau) = E\{[x_k(t) - \mu_x(t)].[x_k(t+\tau) - \mu_x(t+\tau)]\}$$

$$C_{yy}(t, t+\tau) = E\{[y_k(t) - \mu_y(t)].[y_k(t+\tau) - \mu_y(t+\tau)]\}$$

Взаимно-корелационната функция има съответно вида:

$$C_{xy}(t, t+\tau) = E\{[x_k(t) - \mu_x(t)].[y_k(t+\tau) - \mu_y(t+\tau)]\}$$

За частния случай, когато $\tau = 0$ ($t_1 = t_2 = t$). се получават следните опростени зависимости

$$C_{xx}(t,t) = E\{[x_k(t) - \mu_x(t)]^2\} = \sigma_x^2(t)$$

$$C_{yy}(t,t) = E\{[y_k(t) - \mu_y(t)]^2\} = \sigma_y^2(t)$$

$$C_{xy}(t,t) = E\{[x_k(t) - \mu_x(t)].[y_k(t) - \mu_y(t)]\} = C_{xy}(t)$$

Както се вижда корелационните функции съвпадат с дисперсиите на процеса, а $C_{xy}(t,t)$ представлява ковариацията на двете случайни величини за момента от време *t,* а именно $\{x_k(t)\}$ и $\{y_k(t)\}$

3.1.1. Автокорелационна и автоковариационна функции.

Независимо от това дали процесът е стационарен или не можем да въведем статистиките от втори ред..Корелацията между всички двойки случайини значения е подходяща характеристика. Тази корелация зависи от моментите от време t_1 и t_2 и се нарича автоковариационна функция $k_{xx}(t_1, t_2)$ на процеса $\{x(t)\}$.

$$k_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$$

Автокорелационната функция на центриран случаен процес, получена при изваждане на средните значения $\mu_x(t) = E[x(t)]$ се нарича автоковариационна функция $m_{xx}(t_1, t_2)$ на процеса.

$$m_{xx}(t_1, t_2) = E\{[x_k(t_1) - \mu_x(t_1)].[x_k(t_2) - \mu_x(t_2)]\} =$$
$$= k_{xx}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_x(t_2)$$

Окончателно $k_{xx}(t,t)$ е среден квадрат на процеса, а $m_{xx}(t,t)$ е неговата дисперсия. В общия случай на случаен просес двете величини зависят от момента от време, т.е. те са функции на времето.

3.2. Свойства.

Тема 4. Взаимни корелационни функции.

4.1. Същност на взаимните корелационни функции (ВКФ).

4.2. Свойства.

4.3. Определяне на ВКФ. Примери.

4.1. Същност на взаимните корелационни функции (ВКФ).

За стационарните случайни процеси, означени като $\{x_k(t)\}$, $\{y_k(t)\}$, средните значения са постоянни и не зависят от времето *t*, като за тях са изпълнени отношенията:

$$\mu_x = E[x_k(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x.p(x)dx$$

$$\mu_y = E[y_k(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y.p(y)dy$$

където $p(x)$ и $p(y)$ са съответно плътностите на вероятностите на случайните величини $x_k(t)$ и $y_k(t)$. Корелационните (автокорелационнитре) функции на стационарните процеси не зависят от времето *t*. Автокорелационните функции и взаимнокорелационните функция на стационарните процеси с еопределят посредством зависимостите:

$$C_{xx}(t,t+\tau) = E\{[x_k(t) - \mu_x(t)].[x_k(t+\tau) - \mu_x(t+\tau)]\}$$

$$C_{yy}(t,t+\tau) = E\{[y_k(t) - \mu_y(t)].[y_k(t+\tau) - \mu_y(t+\tau)]\}$$

$$C_{xy}(t,t+\tau) = E\{[x_k(t) - \mu_x(t)].[y_k(t+\tau) - \mu_y(t+\tau)]\}$$

Взаимно-корелационната функция има съответно вида:

$$C_{xy}(t,t+\tau) = E\{[x_k(t) - \mu_x(t)].[y_k(t+\tau) - \mu_y(t+\tau)]\}$$

В случая, когато не се извършва центриране на случайните функции спрямо математическото очакване, то функциите се наричат ковариационни функции. Те се представят съответно със зависимостите:

$$R_{xx}(\tau) = E[x_k(t).x_k(t+\tau)]$$

$$R_{yy}(\tau) = E[y_k(t).y_k(t+\tau)]$$

$$R_{xy}(\tau) = E[x_k(t).y_k(t+\tau)]$$

За да се изпълни условието $R_{xx}(\tau)$ да бъде ковариационна функция на слабо стационарен процес $\{x_k(t)\}$, то е необходимо да бъде изпълненоусловието

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

и $R_{xx}(\tau)$ е неотрицателно определена функция.

4.2. Свойства.

Може да се покаже, че $R_{xx}(\tau)$ е непрекъсната функция на τ, ако е непрекъсната в нулата. Аналогично взаимно-ковариационната функция $R_{xy}(\tau)$ е непрекъсната функция на τ, ако $R_{xx}(\tau)$ и $R_{yy}(\tau)$ са непрекъснати в нулата.

За два стационарни случайни процеса $\{x_k(t)\}$ и $\{y_k(t)\}$ съвместната плътност на вероятност $p(x_1, x_2)$ на двойките случайни величини $x_1 = x_k(t)$ и $x_2 = x_k(t+\tau)$ не