Лекции по Анализ-2 част за студенти от инженерните специалности при УАСГ
доц.д-р Г.Тачев,кат. Математика

13. Двоен интеграл. Дефиниция и свойства.

Нека G е затворено и ограничено множество в R^2. Нека направим разбиване τна това множество на подмножества G_i, $1 \leq i \leq n$, така че

$$G = \cup_{i=1}^{n} G_i, \ G_i \cap G_j = \emptyset.$$

Разглеждаме функцията на две променливи $f(x, y)$- дефинирана и непрекъсната в G. нека

$$m_i = \inf_{(x,y)\in G_i} f(x, y), \ M_i = \sup_{(x,y)\in G_i} f(x, y), \ \sigma_i = \text{лицето на сегмент}\, G_i$$

и σ е площта на цялото множество G.

Дефиниция 1 Малка сума на Дарбу за разбиването τ наричаме

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i.$$

Аналогично голяма сума на Дарбу се нарича сумата

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i.$$

Очевидно имаме $S_i \geq s_i$. Точната горна граница на редицата от малките суми на Дарбу $\{s_n\}$ се нарича долен интеграл за $f(x, y)$ и се означава като $\underline{I}$. Точната долна граница на редицата от големите суми на Дарбу $\{S_n\}$ се нарича горен интеграл за $f(x, y)$ и се означава като $\overline{I}$. Очевидно $\underline{I} \leq \overline{I}$.

Дефиниция 2. Казваме, че f е интегруема по Дарбу, ако

$$\underline{I} = \overline{I} = I = \int\int_{G} f(x, y) dx dy.$$

Ако $f(x, y) \equiv 1$, то $m_i = M_i = 1$, $\forall i$. Така получаваме директно, че с двоен интеграл се пресмята площта на фигурата G:

$$\int\int_{G} 1 dx dy = \sigma G$$

.

Дефиниция 3.(Риман) Нека т.$(\xi_i, \eta_i) \in G_i,\ i = \overline{1, n}$. Нека d_i е диаметър на сегмента G_i , т.е най-голямото разстояние между две точки от G_i. Нека $d(n) = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Означаваме като сума на Риман следната сума

$$\sum_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \sigma_i.$$

Ако

$$\exists \lim_{d(n) \to 0} \sum_n = I,$$

то казваме че f е интегруема по Риман и

$$I = \int\int_G f(x, y) dx dy.$$

Теорема 1. Дефинициите за интегруемост по Дарбу и Риман са еквивалентни.

СВОЙСТВА на двоен интеграл:

$$1.\ \int_G \int 1 dx dy = \sigma G$$

.

2. Ако $f(x, y) \ge 0$ за $\forall (x, y) \in G \Rightarrow \int_G \int f(x, y) dx dy \ge 0$. това свойство се нарича позитовност.

3. Линейност. Ако c_1, c_2 са константи, то

$$\int_G \int [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)] dx dy = c_1 \int_G \int f_1(x, y) dx dy + c_2 \int_G \int f_2(x, y) dx dy.$$

Свойствата 2) и 3) позволяват двойният (както и многократен интеграл) да бъдат линеен позитивен функционал.

4. Неравенство на триъгълника. Това свойство е следствие от 2).

$$\left| \int_G \int f(x, y) dx dy \right| \le \int_G \int |f(x, y)| dx dy.$$

5. Ако $G = G_1 \cup G_2$, то

$$\int_G\int f(x,y)dxdy = \int_{G_1}\int f(x,y)dxdy + \int_{G_2}\int f(x,y)dxdy.$$

6. Теорема за средните стойности. Нека $f(x,y)$ е непрекъсната функция на две променливи в област G. Тогава нека M, m са съответно точната горна и долна граница на f в G. От дефиницията за интеграл по Риман следва:

$$m \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \sigma_i}{\sigma} \leq M.$$

Сега понеже f е непрекъсната, то следва че съществува т. $(x_0, y_0) \in G$, такава че $f(x_0, y_0) =$ границата на израза в средата на горната формула при $d(\tau) \to 0$, т.е.

$$\int_G\int f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\sigma(G).$$

7. Пресмятане с двоен интеграл обема на цилиндрични тела. Нека повърхнината $z = z(x,y) \geq 0$ служи като "похлупак"на цилиндрично тяло T и ортогоналната проекция на T в координатната равнина O_{xy} е областта $G \ni (x,y)$. Тогава обемът на тялото T се пресмята по формулата:

$$V(T) = \int_G\int z(x,y)dxdy.$$

14. Пресмятане на двоен интеграл.

1. G е **правоъгълна област** $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$. Правим разбиване τ на този правоъгълник на правоъгълни сегменти G_{ki}, където

$$G_{ki} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i],\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq m,\ G = \cup G_{ki},$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{i-1} < y_i < \cdots < y_m = d.$$

Ако за краткост въведем

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1},\ \Delta y_i := y_i - y_{i-1},\ \sigma_{ki} = \Delta x_k \cdot \Delta y_i,$$

то при произволна точка $(\xi_k, \eta_i) \in G_{ki}$, получаваме

$$m_{ki} \cdot \Delta y_i \cdot \Delta x_k \ \le f(\xi_k, \eta_i)\sigma_{ki} \ \le \ M_{ki} \cdot \Delta y_i \cdot \Delta x_k.$$

Да образуваме следните риманови суми

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} m_{ki}\Delta y_i\right)\Delta x_k \ \le \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k, \eta_i)\sigma_{ki} \ \le \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} M_{ki}\Delta y_i\right)\Delta x_k. \tag{14.1}$$

Нека в горното двойно неравенство извършим граничен преход като $d(\tau) \to 0$. това на практика означава, че

$$n \to \infty,\ m \to \infty,\ \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0,\ \max_{1 \le i \le m} \Delta y_i \to 0.$$

Нека в лявата и дяснара страна на горното двойно неравенство (14.1) първо фиксираме k и пуснем $m \to \infty$, т.е. търсим границата на "вътрешната Риманова сума а след това да пуснем и $n \to \infty$. Така , ако означим

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)dy,$$

предполагайки, че за всяко $x \in [a, b]$ функцията $I(x)$ е интегруема по $x \in [a, b]$ стигаме до следното равенство:

$$\int_a^b I(x)dx \le \int\int_G f(x, y)dxdy \le \int_a^b I(x)dx. \tag{14.2}$$

Ако предположим, че $f(x, y)$ е непрекъсната в затворената и ограничена правоъгълна област G, то това което поискахме за $I(x)$ е изпълнено. И така стигнахме до доказателството на следната важна теорема за повторен интеграл в правоъгълна област:

Теорема 2. Нека при фиксирано $x \in [a,b]$ означим $I(x) = \int_a^b f(x,y)dy$. Предполагаме, че $I(x)$ е интегруема по $x \in [a,b]$. Тогава

$$\int\int_G f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx. \tag{14.3}$$

Така върху правоъгълна област двойният интеграл се пресмята като "повторен интеграл".

Следствие. Ако $f(x,y)$ е непрекъсната функция в затворената и ограничена област G, то имаме

$$\int\int_G f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \tag{14.4}$$

Пример 1. Изчислете интеграла върху квадрата $G = [0,1] \times [0,1]$:

$$\int\int_G (1+xy)e^{xy}dxdy := J.$$

Решение: Ще го пресметнем като поворен интеграл, използвайки (14.3).

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^1 (1+xy)e^{xy}dy \right) dx.$$

Пресмятаме първо вътрешния интеграл при фиксирано x:

$$I(x) = \int_0^1 (1+xy)e^{xy}dy = \int_0^1 y(xe^{xy})dy + \int_0^1 e^{xy}dy =$$

$$= ye^{xy} \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 e^{xy}dy + \int_0^1 e^{xy}dy =$$

$$= 1 \cdot e^x - 0 \cdot e^0 = e^x.$$

Тук използвахме интегриране по части. Следователно

$$J = \int_0^1 I(x)dx = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Пример 2. Нека сега имаме правоъгълната област $G = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Пресметнете интеграла

$$J = \int\int_G e^{x^2} \cdot \sin(x+y) dx dy = ?$$

Решение. На пръв поглед изглежда, че можем да използваме кой да е от двата начина във (14.4) за пресмятане на дадения двоен интеграл като повторен. С този пример ще се убедим, че това не винаги е така, в смисъл че при единия от двата варианта просто не може да се намери примитивна на вътрешния интеграл. Нека първо се опитаме да използваме най-дясната страна в (14.4), т.е.

$$J = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{x^2} \cdot \sin(x+y) dx \right) dy.$$

Една примитивна обаче на $e^{x^2} \cdot \sin(x+y)$ при интегриране по x не е известна. Затова ще използваме другия повторен интеграл за пресмятане на J:

$$J = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{x^2} \cdot \sin(x+y) dy \right) dx.$$

Отново първо пресмятаме вътрешния интеграл

$$I(x) = \int_0^{2\pi} e^{x^2} \cdot \sin(x+y) dy = e^{x^2} \cdot [-\cos(x+y)]\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= e^{x^2} \cdot [-\cos(x+2\pi) + \cos(x+0)] = 0.$$

Следователно

$$J = \int_0^{\pi} 0 dx = 0.$$

2. G е **криволинеен трапец**.

Теорема 3. Нека G е следния криволинеен трапец $G := (x, y) : a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, където y_1, y_2 са непрекъснати функции на

$x \in [a,b]$. Тогава е в сила следната формула за пресмятане на двойния интеграл върху G от непрекъснатата функция $f(x,y)$:

$$\int\int_G f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx. \tag{14.5}$$

Доказателство: Нека

$$d = \max_{a \le x \le b} y_2(x),\ c = \min_{a \le x \le b} y_1(x).$$

Да дефинираме правоъгълника $\Gamma := [a,b] \times [c,d]$. Нека $\Gamma_1 := \{(x,y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le y_1(x)\}$ и също аналогично $\Gamma_2 := \{(x,y),\ a \le x \le b,\ y_2(x) \le y \le d\}$. Очевидно имаме $\Gamma = G \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Но нашата функция $f(x,y)$ е дефинирана само върху криволинейния трапец G. Затова я додефинираме върху по-голямата правоъгълна област Γ, като приемем, че $f(x,y) \equiv 0$, за всички точки $(x,y) : (x,y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Така от свойствата на двойния интеграл получаваме

$$\int\int_\Gamma f(x,y)dxdy = \int\int_G f(x,y)dxdy + \underbrace{\int\int_{\Gamma_1} f(x,y)dxdy}_{=0} + \underbrace{\int\int_{\Gamma_2} f(x,y)dxdy}_{=0} =$$

$$= \int\int_G f(x,y)dxdy = J.$$

И така стигнахме до следния начин за пресмятането на двойния интеграл J върху криволинейния трапец G:

$$J = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left[\left(\int_c^{y_1(x)} + \int_{y_1(x)}^{y} {}_2(x) + \int_{y_2(x)}^{d} \right) f(x,y)dy \right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$

С това доказахме формулата (14.5).

Пример 3. Нека G е затворена област, чийто контур се определя от графиките на следните функции $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$. Пресметнете

$$I = \iint\limits_G e^{x+y} dxdxy = ?$$

Решение: Ако нашата област G по която трябва да сметнем двойния интеграл е криволинеен трапец, то първата ни работа е да определим едната променлива да се изменя в граници-конкретни константи, а другата от двете променливи x, y -да се изменя в граници-които да са функции на първата променлива. След това пристъпване към пресмятане на повторния интеграл по (14.5).По описаната процедура в конкретния пример можем да определим границите на G по два начина:

$$G : \left| \begin{array}{l} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq \ln y. \end{array} \right. , \quad G : \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \ln 2 \\ e^x \leq y \leq 2. \end{array} \right.$$

Тук за разлика от пример 2 можем и по двата начина да сметнем двойния интеграл I. При първия получаваме

$$I = \int_1^2 \int_0^{\ln y} (e^x \cdot e^y dx) dy = \int_1^2 \left(e^y \cdot e^x \Big|_{x=0}^{x=\ln y} \right) dy = \int_1^2 e^y (y-1) dy =$$

$$= \int_1^2 y d(e^y) - (e^2 - e) = ye^y \Big|_1^2 - \int_1^2 e^y dy - e^2 + e =$$

$$= 2e^2 - e - e^2 + e - e^2 + e = e.$$

Същият отговор се получава и при използване на втория начин за представяне на областта G. Проверете го!

15. Троен интеграл. Пресмятане.

Нека тримерното тяло T е оградено от затворената повърхнина $S = S_1 \cup S_2$, която се състои от две части : $S_1 : z = z_1(x, y)$-горна повърхнина и $S_2 : z = z_2(x, y)$-долна повърхнина. Нека D е ортогоналната проекция на S върху равнината O_{xy} и имаме

$$D : \left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x). \end{array} \right.$$

Теорема 1. Нека за тримерното тяло T имаме $T : z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, $(x,y) \in D$. Ако за всяка точка $(x,y) \in D$ имаме че функцията

$$I(x,y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

е интегруема по $(x,y) \in D$, то тройният интеграл от $f(x,y,z)$ по тримерното тяло T се пресмята като

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D I(x,y)dxdy =$$

$$= \int_a^b \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx. \qquad (15.1)$$

Дефинициите за интегруемост на непрекъсната функция $f(x,y,z)$ в тримерното тяло T в смисъл на Дарбу и Риман са напълно аналогични на тези при двоен интеграл. Ако разбием тялото T на сегменти T_i, $1 \le i \le n$, $T = \cup_{i=1}^n T_i$ нека пак да означим

$$m_i = \inf_{(x,y,z)\in T_i} f(x,y,z),\ M_i = \sup_{(x,y,z)\in T_i} f(x,y,z),$$

и съответно малката и голяма сума на Дарбу за това разбиване

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i V(T_i),\ S_n = \sum_{i=1}^n M_i V(T_i),\ V(T_i) = \text{ обем на сегмента} T_i.$$

Ако $\underline{I}$ е точната горна граница на $\{s_n\}$, а $\overline{I}$- точната долна граница на $\{S_n\}$ и се окаже, че $\underline{I} = \overline{I} = I$, то каваме, че f е интегруема в смисъл на Дарбу и

$$I = \int\int_T\int f(x,y,z)dxdydz.$$

Да образуваме сега следните Риманови суми

$$\sum_n := \sum_{i=1}^n f(x_i,y_i,z_i)V(T_i),\ (x_i,y_i,z_i) \in T_i.$$

Ако съществува

$$I = \lim_{d(\tau)\to 0,\, n\to\infty} \sum_n,$$

то казваме че f е интегруема в смисъл на Риман и

$$I = \int\int_T\int f(x,y,z)dxdydz.$$

Както и при двоен интеграл, така и при троен интеграл двете дефиниции са еквивалентни и (15.1) е практическото правило по което пресмятаме тройния интеграл.

Свойствата на тройния интеграл са идентични с тези при двойния, с тази разлика, че ако $f \equiv 1$, то

$$\int\int_T\int 1dxdydz = V(T).$$

Пример 1. Пресметнете $I = \int\int_T\int \frac{1}{1-x-y}dxdydz$ =?, където T е област, ограничена от равнините $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$.

Решение: Имаме

$$T := \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}.$$

Тогава

$$I = \int\int\limits_D \left(\int\limits_0^{1-x-y} \frac{1}{1-x-y}dz \right) dxdy =$$
$$= \int\int\limits_D \frac{1-x-y}{1-x-y}dxdy = S(D) = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Пресметнете тройния интеграл $I = \int\int_T\int zdxdydz$ =?, ако T е конусът

$$T := \begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ z = h,\ h > 0. \end{cases}$$

За да приложим (15.1) определяме границите на T така

$$T := \begin{cases} -h \leq x \leq h \\ -\sqrt{h^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{h^2 - x^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h. \end{cases}$$

Тогава според (15.1) имаме

$$I = \int\int_D \left(\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} zdz \right) dxdy = \frac{1}{2} \int\int\limits_D [h^2 - x^2 - y^2] dxdy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-h}^{h} \left(\int\limits_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} [h^2 - x^2 - y^2] dy \right) dx =$$

$$= 2 \int\limits_{0}^{h} \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{h^2-x^2}} [h^2 - x^2 - y^2] dy \right) dx = \frac{4}{3} \int_0^h \left(h^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx.$$

В последния интеграл правим субституцията

$$x = h \sin t,$$

и получаваме

$$I = h^4 \frac{4}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4}{3} h^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt =$$

$$= \frac{h^4}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t] dt =$$

$$= \frac{h^4}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}] dt = \frac{\pi}{4} h^4.$$

16.Смяна на променливите при кратен интеграл.

Нека са ни дадени две отворени области D, D' от R^2 и една непрекъсната и дефинирана в $D \ni (x,y)$ функция $f(x,y)$. Нека изображението

$$\phi : D' \to D,\ \phi :\ (u,v) \to (x,y),$$

задава едно взаимно-еднозначно съответствие между двете множества D и D', което означава че на всяка точка $(u,v) \in D'$ съответствува точно една точка $(x,y) \in D$, която се получава чрез следната **смяна на променливите**:

$$\phi := \left| \begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array} \right. . \tag{16.1}$$

При тази смяна на променливите (x,y) се наричат стари променливи, а (u,v) - новите променливи. Всяка една такава смяна на променливите се асоциира с нейния **якобиан** $J := J(\phi)$, който предтсавлява следната матрица:

$$J := \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ y_v & y_v \end{pmatrix}. \tag{16.2}$$

В горната формула x_u, x_v, y_u, y_v са частните производни на функциите $x(u,v), y(u,v)$ по съответните променливи, за които предполагаме, че са непрекъснати като функции на две променливи $(u,v) \in D'$. За да се осигури взимната еднозначност на изображението между двете области $\phi : D' \to D$ едно достатъчно условие е да поискаме **за всяко** $(u,v) \in D'$:

$$\det(J) := |J| \neq 0. \tag{16.3}$$

За да опростим означенията по-нататък с $|J|$ ще означаваме абсолютната стойност на $\det(J)$.

Teorema 1. При предположенията и означенията, които направихме по-горе, в сила е следната формула за смяна на променливите при двоен интеграл:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J| dudv. \tag{16.4}$$

Формулата (16.4) лесно се обобщава за три и повече ($n-$) променливи. По-нататък ще разгледаме три най-често прилагани субституции при кратните интеграли, а именно - **полярната** смяна на променливите при двоен интеграл, и **сферичната** и **цилиндрична** смени на променливите при троен интеграл.

Полярна смяна. Това е следната смяна:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi. \end{array} \right. \qquad (16.5),$$

където (x, y) са старите декартови координати на т.$M(x, y)$ x е абсцисата на т.М, а y еординатата на т.М. Полярните координати ρ, φ са новите координати, като $\rho = |\vec{OM}| \geq 0$ е радиус-векторът на т.М, а $\varphi = \angle(O_x, \vec{OM}) \in [0, 2\pi]$ е полярният ъгъл на т.М. Якобианът на тази смяна се пресмята като

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho. \qquad (16.6)$$

Цилиндрична смяна. Това е следната смяна в тримерното пространство: ако $M(x, y, z)$ е точка, зададена с нейните декартови координати, то новите цилиндрични координати са ρ, φ, z, където (ρ, φ) са полярните координати на т.$'$-ортогонална проекция на т.М в координатната равнина O_{xy}, а z като нова координата съвпада със старата координата z. Цилиндричната смяна се задава като:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z. \end{array} \right. \qquad (16.7)$$

Якобианът на цилиндричната смяна се пресмята като:

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_z \\ y_\rho & y_\varphi & y_z \\ z_\rho & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho. \qquad (16.8)$$

Сферична смяна. Това е следната смяна в тримерното пространство: ако $M(x, y, z)$ е точка, зададена с нейните декартови координати, то новите сферични координати са ρ, φ, θ, където $\rho = |\vec{OM}| \geq 0$ е радиус-векторът на т.М, $\varphi = \angle(O_x, \vec{OM'}) \in [0, 2\pi]$, ако M' е ортогоналната проекция на т.М в координатната равнина O_{xy}, $\theta = \angle(O\vec{M}', O_z) \in [0, \pi]$. Сферичната смяна се задава като:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta. \end{array} \right. \tag{16.9}$$

Якобианът на сферичната смяна се пресмята като:

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_{theta} \\ y_\rho & y_\varphi & y_{theta} \\ z_\rho & z_\varphi & z_{theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \cdot \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} + (-\rho\sin\theta) \cdot \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -\rho^2 \sin\theta. \tag{16.10}$$

Следователно $|J| = \rho^2 \sin\theta$.

Пример 1. Пресметнете

$$I = \int\int_G \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dxdy,$$

ако $G : \{x^2 + y^2 - 2ax = 0,\ a > 0$.

Решение: Лесно се вижда, че $G : (x-a)^2 + y^2 = a^2$. Правим полярна смяна и виждаме, че $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. В полярни координати уравнението на окръжността G е $\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi = 0$, $\rho = 2a\cos\varphi$. Тогава границите за изменение на ρ са $0 \le \rho \le 2a\cos\varphi$. Тогава

$$I = -\frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\varphi} (4a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(4a^2 - \rho^2) \right) d\varphi =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(4a^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - (4a^2)^{\frac{3}{2}}] d\varphi = \left(-\frac{8a^3}{3}\right) \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi - 1) d\varphi = \pi \cdot \frac{8a^3}{3}.$$

Пример 2. Пресметнете

$$I = \int\int\int_T z dx dy dz,$$

ако T е частта от кълбото $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, намираща се в първи октант $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Решение: Определяма границите за изменение на сферичните координати $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \varphi, \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Тогава

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho \cos\theta \cdot \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^a \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

17. Приложения на кратните интеграли.

I. В геометрията.

1. Пресмятане на лицето на равнинна фигура $G \subset R^2$:

$$S(G) = \int\int_G 1 \cdot dx dy.$$

2. Ако G е зададена в полярни координати (ρ, θ) като:

$$\left| \begin{array}{l} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ 0 \leq \rho \leq \rho(\theta) \end{array} \right.$$

$$S(G) = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_0^{\rho(\theta)} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta.$$

3. Обем на тримерно тяло T:

$$V(T) = \int\int\int_T 1 \cdot dx dy dz.$$

4. Обем на цилиндрично тяло.

$$V(T) = \int\int_D z(x,y)dxdy,$$

където D е ортогоналната проекция на тялото T в координатната равнина O_{xy}.

5. Лице на повърхнина. **А.Параметричното** задаване на повърхнината S е:

$$O\vec{M} = \vec{r}(u,v) = x(u,v) \cdot \vec{i} + y(u,v) \cdot \vec{j} + z(u,v) \cdot k, \qquad (17.1)$$

където $M(x,y,z) \in S$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. Ако $C = const$,

$$\vec{r}(u,C) \Rightarrow u - \text{линия},$$

$$\vec{r}(C,v) \Rightarrow v - \text{линия},$$

$$\vec{r_u} = x_u \cdot \vec{i} + y_u \cdot \vec{j} + z_u \cdot \vec{k} -$$

е допирателния вектор към u-линията, а

$$\vec{r_v} = x_v \cdot \vec{i} + y_v \cdot \vec{j} + z_v \cdot \vec{k} -$$

е допирателния вектор към v-линията. Нека е дадено, че параметрите u и v се менят в областта $D \subset R^2$.

Дефиниция. Равнината τ-се нарича тангенциална (допирателна) към повърхнината S в т. $M(x_0,y_0,z_0) = M(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0)) \in S$, ако е зададена с уравнението:

$$\tau := \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \qquad (17.2)$$

Дефиниция. Наричаме S гладка повърхнина, ако във всяка точка $M \in S$, $\exists \vec{r}_u \times \vec{r}_v$- нормалният вектор $\vec{N}$ към S в M, т.е. във всяка точка съществува еднозначно-определена тангенциална равнина τ, зададена с уравнението (17.2). Уравнението на τ изглежда така

$$\tau : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Дефинираме следните Гаусови елементи:

$$E = \vec{r}_u^2 = (\vec{r}_u, \vec{r}_u) = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2.$$

$$G = \vec{r}_v^2 = (\vec{r}_v, \vec{r}_v) = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

$$F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

Получаваме

$$|\vec{N}| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\vec{r}_u^2 \cdot \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2}.$$

Примомняме. че векторното произведение $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{N}$ се задава като

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & x_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \vec{i}(y_u z_v - z_u y_v) - \vec{j}(x_u z_v - z_u x_v) + \vec{k}(x_u y_v - y_u x_v).$$

Тогава лицето на частта от повърхнината S при изменение на параметрите $(u, v) \in D$ се дава с формулата

$$S = \int\int_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{17.3}$$

B. Явно зададена повърхнина можем да преформулиране като параметрично зададена по следния начин:

$$S : z = z(x, y),\ (x, y) \in D \subset R^2,$$

$$\left| \begin{array}{l} x = u = x(u, v) \\ y = v = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right. ,$$

$$\vec{r}_u = (1, 0, z_x),\ \vec{r}_v = (0, 1, z_y),$$

$$E = 1 + z_x^2,\ F = z_x z_y,\ G = 1 + z_y^2.$$

Тогава лицето на повърхнината S се пресмята по формулата

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy. \tag{17.4}$$

C. Неявно зададена повърхнина. Това е повърхнина зададена с алгебричното уравнение
$$F(x, y, z) = 0.$$
Казваме, че т.$M(x, y, z) \in S$, ако координатите и удовлетворяват горното уравнение. Ако предположим, че F заедно с частните и производни по x, y, z са непрекъснати в област $D \ni (x_0, y_0, z_0)$, $F_z = \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, от анализ първа част знаем, че в областта D съществува неявна функция $z = z(x, y)$, така че
$$F(x, y, z(x, y)) = 0.$$
Известно е също така, че
$$z_x = -\frac{F_x}{F_z},\ z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$
Тогава по формулата (17.4) получаваме
$$S = \int\int_G \sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2}} dxdy, \tag{17.5}$$
където G е ортогоналната проекция на D в координатната равнина O_{xy}.

Пример1. Пресметнете лицето на пълната повърхнина на сферата
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$
Решение: Достатъчно е да пресметнем лицето на тази част от повърхнината, намираща се в първи октант. Тук имаме явно задаване на повърхнината
$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$
$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},\ z_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$
Тогава по формулата (17.4) имаме
$$\frac{S}{8} = \int\int_D \sqrt{1 + \sqrt{x^2 + y^2} R^2 - x^2 - y^2} dxdy = R \int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$
В последния двоен интеграл правим полярна смяна
$$\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \quad \Big| \ 0 \leq \rho \leq R 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}.$$

Тогава имаме

$$\frac{S}{8} = R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \int_0^R (R^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d(R^2 - \rho^2) =$$

$$= -\frac{\pi R}{2} \cdot (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = -\frac{\pi R}{2} \cdot [0 - R] = \frac{\pi}{2} R^2.$$

Окончателно имаме $S = 4\pi R^2$-известната формула за лицето на пълната повърхнина на сфера с радиус R.

Пример 2. Сферата $x^2+y^2+z^2 = R^2$ е пресечена с цилиндър $x^2+y^2 = Rx$. Намерете обема на полученото сечение.

Решение: Ортогоналната проекция на полученот цилиндрично тяло в координатната равнина O_{xy} е кръгът, чийто контур е окръжността:

$$D : (x - \frac{R}{2})^2 + (y - 0)^2 = (\frac{R}{2})^2.$$

Ще използваме формулата за пресмятане обем на цилиндрично тяло с двоен интеграл:

$$\frac{V(T)}{2} = \int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy = 2 \int\int_{D^+} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy,$$

където D^+ е тази част от D, която се намира в първи квадрант. Извършваме полярна смяна на променливите:

$$\frac{V(T)}{2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\varphi =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\varphi} (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - \rho^2) d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi) d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \left[\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\varphi) d\cos\varphi \right] =$$

$$= \cdots = \frac{2}{3} R^3 (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}). \Rightarrow V(T) = \frac{4}{3} R^3 (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}).$$

Приложение в механиката.

1. Пресмятане масата на материално тримерно тяло. Ако T е тримерно тяло, с плътност $f(x,y,z)$ в т.$(x,y,z)\in T$ и f е непрекъсната функция. Тогава масата на тялото T се пресмята по формулата

$$m(T)=\int\int\int_T f(x,y,z)dxdydz.$$

2. Пресмятане координатите на центъра на тежест $G(\xi,\eta,\zeta)$. Ако G е центъра на тежест на тялото T, то координатите му се пресмятат по формулите

$$G_\xi=\frac{1}{m(T)}\int\int\int_T x\cdot f(x,y,z)dxdydz,\ G_\eta=\frac{1}{m(T)}\int\int\int_T y\cdot f(x,y,z)dxdydz,$$

$$G_\zeta=\frac{1}{m(T)}\int\int\int_T z\cdot f(x,y,z)dxdydz.$$

Пример 3. Нека е дадено полукълбото $T: x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq 0$, с еднородна плътност във всяка т.$=1$. Пресметнете масата му и координатите на центъра на тежест.

Решение: Лесно се съобразява , че $m(T)=\frac{2}{3}\pi R^3$. Да пресметнем G_ζ. Имаме

$$G_\zeta=\frac{1}{m(T)}\cdot\int\int\int_T zdxdydz.$$

В горния интеграл ще направим сферична смяна на променливите:

$$\varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\ 0\leq\rho\leq R.$$

Тогава

$$G_\zeta=\frac{1}{m(T)}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi=2\pi\frac{R^4}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{m(T)}=\frac{3}{8}R.$$

Аналогично се получава $G_\xi=G_\eta=0$. (проверете го !)

18. Несобствен интеграл.

I. В неограничен интервал Нека разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [1, \infty)$. За тази функция да пресметнем определения интеграл

$$\int_1^B \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=B} = 1 - \frac{1}{B}.$$

$$\lim_{B\to\infty}\left(\int_1^B \frac{1}{x^2}dx\right) = \lim_{B\to\infty}(1 - \frac{1}{B}) = 1.$$

Тогава казваме че съществува несобствения интеграл от $f(x)$ върху $[1, \infty)$ и записваме

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Дефиниция. Нека $x \in [a, \infty)$ и $f(x)$ е непрекъсната функция в $[a, \infty)$. Ако съществува $\lim\limits_{B\to\infty} \int_a^B f(x)dx$ и е крайно число, казваме че $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл и тази граница се бележи като $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Пример 2 Нека отново $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, \infty)$. Имаме

$$\int_1^B \frac{dx}{x} = \ln B,\ \lim_{B\to\infty}(\ln B) = +\infty,\ \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = +\infty.$$

Дефиниция. Ако несобствения интеграл е крайно число, той се нарича сходящ. ако не е сходящ, той се нарича разходящ.

Пример 3.

$$\int_1^\infty \cos x dx = \lim_{B\to\infty}\int_1^B \cos x dx = \lim_{B\to\infty}(\sin B - \sin 1),$$

но тази граница не съществува. Затова този интеграл е разходящ.

Пример 4. За кои стойности на $\alpha =?$ интегралът $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ е сходящ?

$$\int_1^B \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=1}^{x=B} = \frac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha} - 1).$$

a) Ако $\alpha \leq 1$ -разходящ,
b) Ако $\alpha > 1$- сходящ.

Критерии за сравнение:

1. Нека $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$.

Ако $\int\limits_1^\infty \varphi(x)dx$ е сходящ, $\Rightarrow$ $\int_1^\infty f(x)dx$ е сходящ и

$$\int_1^\infty f(x)dx \leq \int\limits_1^\infty \varphi(x)dx$$

.

Ако $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ е разходящ $\Rightarrow$ $\int\limits_1^\infty \varphi(x)dx$ е разходящ.

Ако $\int\limits_1^\infty |f(x)|dx$ е сходящ $\Rightarrow$ $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ е сходящ. В този сличай казваме, че интегралът $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ е абсолютно-сходящ. Ако обаче $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ е сходящ, но $\int\limits_1^\infty |f(x)|dx$ е разходящ, то той се нарича условно-сходящ. Последното свойство се проверява така

$$0 \leq f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \leq |f(x)|,$$
$$0 \leq f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \leq |f(x)|,$$
$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

а несбствените интеграли от f_1, f_2 са сходящи съгласно даденото.

Пример 5.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to\infty} \left(\int\limits_{-B}^{B} \frac{dx}{1+x^2} \right) =$$
$$= \lim_{B\to\infty} (\arctan B - \arctan(-B)) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

II. Несобствевн интеграл от неограничена функция.

Пример 6.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{B\to 1,\, B<1} \int_0^B \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{B\to 1} (2 - 2\sqrt{1-B}) = 2.$$

Дефиниция. Ако функцията $f(x)$ е неограничена в т. b, $x \in (a,b)$ и $\exists \lim\limits_{\epsilon\to 0, \epsilon>0} \int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)dx < \infty$, казваме че несобственият интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ. Ако тази граница не съществува, то този интеграл е разходящ.

Пример 7. Ако $f(x)$ е неограничена в т.$c \in (a,b)$, то казваме че несобственият интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ, ако са сходящи и двата несобствени интеграли в дясната страна на следното равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx.$$

Например за $x \in [1,3]$ имаме

$$\int_1^3 \frac{dx}{(2-x)^2} = \int_1^2 \frac{dx}{(2-x)^2} + \int_2^3 \frac{dx}{(2-x)^2}.$$

И двата интеграла в дясната страна са разходящи, затова и този в лявата страна е също разходящ.

Сравнение. За кои стойности на параметър α е сходящ интегралът $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$? Лесно се получава, че при $\alpha \geq 1$ интегралът е разходящ, а при $\alpha < 1$ е сходящ.

II. Кратни несобствени интеграли.

Пример 8. Покажете, че

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi.$$

Като следствие се получава стойността на интеграла на Поасон

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Решение: Нека $D(R) : \{0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Тогава имаме

$$I = \lim_{R\to\infty} \int\int_{D(R)} e^{x^2+y^2} dxdy.$$

В последния двоен интеграл върху кръга $D(R)$ извършваме полярна смяна.

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho \right) d\varphi = \frac{2\pi}{-2} \int_0^R e^{-\rho^2} d(-\rho^2) =$$

$$-\pi \cdot e^{-\rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = \pi(1 - e^{-\rho^2}) \to_{R\to\infty} \pi.$$

И така установихме

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi.$$

19. Интеграли, зависещи от параметър.

Нека функцията $f(x, \alpha)$ е непрекъсната в правоъгълника $D : [a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$. Казваме, че α е параметър. Да дефинираме интегралът

$$F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) dx. \tag{19.1}$$

Теорема 1. $F(\alpha)$ е непрекъсната по α в $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Доказателство: Нека α, $\alpha + \Delta\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Да разгледаме нарастването

$$F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) = \int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)] dx. \tag{19.2}$$

Тъй като $f(x, \alpha)$ е непрекъсната в затворения правоъгълник D следва, че за $\frac{\epsilon}{b-a} > 0$, $\exists \delta > 0$, такова че от $|\Delta\alpha| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)| < \frac{\epsilon}{(b-a)}$. Тогава имаме

$$|F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha)| \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon.$$

Доказателството е завършено. $\square$.

Пример 1. Пресметнете

$$I := F(\alpha) = \int_0^1 \ln(x^2 + \alpha^2) dx.$$

След интегриране по части лесно се получава

$$F(\alpha) = x\ln(x^2 + \alpha^2)\Big|_{x=0}^{x=1} - 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + \alpha^2} dx =$$

$$= \ln(1 + \alpha^2) - 2 + 2\alpha \arctan(\frac{1}{\alpha}).$$

Теорема 2. Ако $f(x, \alpha)$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ са непрекъснати в D,то от тук следва

$$F'(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx. \tag{19.3}$$

Доказателство: От (19.2) и Теоремата на Лагранж $\Rightarrow$ $\exists \theta \in (0, 1)$:

$$\frac{F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha + \theta \cdot \Delta\alpha) dx. \tag{19.4}$$

От даденото в условията на теоремата следва, че подинтегралната функция в дясната страна на (19.4) клони към $f_\alpha(x, \alpha)$, откъдето ще следва че и диференчното частно в лявата страна ще има граница, т.е $F'(\alpha)$ също съществува и формулата (19.3) е установена. $\square$

Резлтатът от Теорема 1 може да се разшири, ако предположим, че a, b са също функции на параметъра α. Нека

$$F(\alpha) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx. \tag{19.5}$$

Теорема 2. Ако $a(\alpha), b(\alpha), f(x, \alpha)$ са непрекъснати в правоъгълника D, то и $F(\alpha)$ пт (19.5) е също непрекъсната.

Теорема 3. Ако $f(x,\alpha), f_\alpha(x,\alpha)$, $a'(\alpha)$, $b'(\alpha)$ са непрекъснати в $D := [a(\alpha), b(\alpha)] \times [\alpha_1, \alpha_2]$, то от тук следва

$$F'(\alpha) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f_\alpha(x,\alpha)dx + f(b(\alpha),\alpha)\cdot b'(\alpha) - f(a(\alpha),\alpha)\cdot a'(\alpha). \tag{19.6}$$

Приемер 2. Нека $b > -1$, $\alpha > -1$. Пресметнете интеграла с параметър α:

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^b - x^\alpha}{\ln x} dx =? \tag{19.7}$$

Решение: Като използваме (19.3) получаваме

$$F'(\alpha) = \int_0^1 \frac{-x^\alpha \ln x}{\ln x} dx = -\frac{1}{\alpha+1}.$$

От тул с интегриране по α получаваме

$$F(\alpha) = -\ln(\alpha+1) + C. \tag{19.8}$$

При $b = \alpha$ от условието на задачата се вижда, че $F(b) = 0$. Тогава от (19.8) следва

$$0 = -\ln(b+1) + C \Rightarrow C = \ln(b+1).$$

Сега отново от (19.8) получаваме накрая

$$F(\alpha) = \ln\left(\frac{b+1}{\alpha+1}\right).$$

Пример 3. Решете чрез диференциране по b интеграла

$$F(b) = \int\limits_{-}^{\infty} \frac{e^{-ax}\cdot\sin(bx)}{x}\, dx. \tag{19.9}$$

Решение: След диференциране по b и двукратно интегриране по части получаваме

$$F'(b) = \frac{a}{a^2+b^2}. \tag{19.10}$$

$$F(b) = \int \frac{a}{a^2+b^2} db + C(a) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + C(a). \tag{19.11}$$

Полагаме $b = 0$ в (19.11) и в условието на задачата. Получаваме

$$0 = 0 + C(a), \Rightarrow \; C(a) = 0, \Rightarrow \; F(b) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (19.12)$$

Ако в (19.12) положим $b = 1$ и $a \to 0$, $a > 0$, извършвайки граничен преход в интеграла от условието на задачата имаме

$$F(1) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Последният интеграл се нарича интеграл на Дирихле.

20. Скаларно и векторно поле.

Дефиниция 1. Скаларно поле. Нека $M(x, y, z) \in G \subset R^3$. Изображението

$$U : \; R^3 \to R, \; U : M \to U(x, y, z) - \text{число-скалар} \qquad (20.1)$$

се нарича скаларно поле.

Дефиниция 2. Векторно поле. Изображението

$$\vec{F} : \; M \in G \to \vec{F}(M) = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k} \qquad (20.2)$$

се нарича векторно поле.

Пример 1. а) Температурата в дадена точка от материално тяло е скаларно поле.

б) Скоростта в дадена точка от течащ вода е векторно поле.

в) Гравиатционното поле е векторно поле.

Дефиниция 3. Нека е дадено скаларното поле $U : M(x, y, z) \to U(x, y, z)$. Множеството от всички точки $M \in G$ за които $U(x, y, z) = C = const$, се наричат линии (повърхнини) на ниво.

Дефиниция 4. ГРАДИЕНТ на скаларното поле U е векторът

$$grad(U) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right). \qquad (20.3)$$

Лесно се проверява, че нормалният вектор $\vec{N}$ към повърхнината на ниво $U(x,y,z) = C$ в т. $M(x,y,z)$ от тази повърхнина се оказва точно градиента на скаларното поле $grad(U)$. Нека е дадено направлението $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Тогава производната по направление $\vec{l}$ на скаларното поле е както знаем

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= (\overrightarrow{grad}(U), \vec{l}) = |\ \overrightarrow{grad}(U)\ | \cdot |\vec{l}| \cos(\varphi), \tag{20.4}$$

където φ е ъгълът междъ двата вектора. Тъй като най-голямата стойност на косинуса е 1, то следва че максималното изменение на скаларното поле U по посока на вектора-направление $\vec{l}$ се получава, ако вземем този вектор да съвпада с градиента на полето в т.$M(x,y,z)$.

Пример 2. Нека е дадено скаларното поле $U = x^2 + y^2 + z^2$. Тогава

$$grad(U) = (2x, 2y, 2z) = 2x\vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + 2z\cdot$$

Дефиниция 5. Векторното поле $\vec{F}$ се нарича **потенциално**, ако съществува друго скаларно поле $U = U(x,y,z)$,така че

$$\overrightarrow{grad}(U) = \vec{F}, \Rightarrow\ (P,Q,R) = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}). \tag{20.5}$$

Ако са налице условията за равенство на смесените производни на скаларната функция $U(x,y,z)$, то получаваме равенствата

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{20.6}$$

Без доказателство ще приемем следната важна теорема:

Теорема 1. Уравненията (20.6) са необходимото и достатъчно условие векторното поле $\vec{F}$ да бъде потенциално, т.е. да съществува скаларно поле U, така че

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz. \tag{20.7}$$

Дефиниция 6. Ротор $rot(\vec{F})$ на векторното поле $\vec{F}$ се задава с

$$rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \qquad (20.8)$$

Следствие. Векторното поле $\vec{F}$ е потенциално тогава и само тогава, когато

$$rot(\vec{F}) = \vec{0}. \qquad (20.9)$$

Дефиниция 7. Диверегнция е числова характеристика на едно векторно поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ и се задава като

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (20.9)$$

Пример 3. Ако $\vec{r} = (x, y, z)$, то проверете че скаларното поле $U(x, y, z) = -\frac{1}{|\vec{r}|}$ е потенциал за векторното поле $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, т.е. $\vec{F}$ е потенциално поле.

Решение: Пресмятаме частната производна по x на U:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{x}{|\vec{r}|^3}.$$

аналогично се пресмятат и другите две частни производни. Следователно

$$grad(U(x, y, z)) = \left(\frac{x}{|\vec{r}|^3}, \frac{y}{|\vec{r}|^3}, \frac{z}{|\vec{r}|^3}\right) = \vec{F}.$$

Проверете сами, че $rot(\vec{F}) = \vec{0}$.