Лекции по Анализ-2 част за студенти от инженерните специалности при УАСГ

доц.д-р Г.Тачев,кат. Математика

Криволинейни и повърхнинни интеграли.

21. Криволинеен интеграл от I-ви род. Нека се опитаме да намерим формула за пресмятане масата на материална дъга, която представлява гладка крива L, която е параметрично-представена

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ t \in [\alpha, \beta], \tag{21.1}$$

така че във всяка т. $M(x, y, z) = M(x(t), y(t), z(t)) \in L$ плътността се задава като стойност на скаларно-значната функция на три променливи $f(x, y, z)$. Нека да разделим интервала $[\alpha, \beta]$ на n части с разбиване τ:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots .... < t_n = \beta.$$

Полагаме

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1},\ d(\tau) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i.$$

Точката $M_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \in L$. С Δl_i да означим дължината на дъгата от L между точките M_{i-1} и M_i. Занем от анализ първа част, че

$$\Delta l_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r'}(t)| dt = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \tag{21.2}$$

От теоремата за средните стойности за определения интеграл в (21.2) следва, че съществува т.$\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, така че

$$\Delta l_i = |\vec{r'}(\xi_i)| \Delta t_i. \tag{21.3}$$

За приближено пресмятане масата на сегмента от дъгата L, заключен между точките M_{i-1} и M_i вземаме

$$m_i := f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \cdot \Delta l_i, \tag{21.4}$$

където за Δl_i ще вземем израза от (21.3) Сега образуваме Римановите суми

$$S(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \cdot |\vec{r'}(\xi_i)| \Delta t_i. \tag{21.5}$$

При $d(\tau) \to 0$ тази сума ще клони към определения интеграл

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))|\vec{r'}(t)|dt, \tag{21.6}$$

който приемаме за **маса на материалната линия** L и като криволинеен интеграл от първи род от скаларната функция f по гладката линия L. Криволинейният интеграл от първи род (21.6) може да се запише и по друг начин: Ще припомним, че ако с s означим дължината на сегмента от L:

$$s = \int_0^t |\vec{r'}(u)|du,$$

то от анализ първа част е известно, че

$$ds = |\vec{r'}(t)|dt.$$

Тогава криволинейният интеграл (21.6) можем да запишем като

$$M = \int_L f(x, y, z)ds. \tag{21.7}$$

Ако т.A е единия край на линията L, а т.B е другия край, то линията L се записва и като $L = \widehat{AB}$.

Свойства на криволинеен интеграл от първи род:

$$1. \int\limits_{\widehat{AB}} f ds = \int\limits_{\widehat{BA}} f ds.$$

Това свойство показва че стойността на криволинеен интеграл от първи род не се променя при смяна границите на интеграла, което може да се обоснове и с факта , че масата на мат. линия L е една и съща, независимо от това дали линията ще започва от т. А и завършва с т. B или обратно.

$$2. \text{ Ако } f(x, y, z) \geq 0 \Rightarrow \int_L f ds \geq 0.$$

Това свойство е позитивност.

$$3. \left|\int_L f ds\right| \leq \int_L |f|\, ds.$$

Това свойство е известното неравенство на триъгълника.

$$4. \int\limits_{\widehat{AB}} f ds = \int\limits_{\widehat{AC}} f ds + \int\limits_{\widehat{CB}} f ds.$$

5.Теорема за средните стойности.

$$\int\limits_{\widehat{AB}} f ds = |\widehat{AB}| \cdot f(M),\ M \in \widehat{AB}.$$

Приложение в механиката.

1. Както вече видяхме масата на материална линия L с плърност в т. (x, y, z) -стойността на $F(x, y, z)$ се пресмята с криволинейния интеграл от първи род

$$M = \int_L f(x, y, z) ds.$$

2. Центърът на тежестта на L -т. G има координати, които се пресмятат чрез формулите

$$G_x = \frac{1}{M} \int_L x f(x, y, z) ds,$$

$$G_y = \frac{1}{M} \int_L y f(x, y, z) ds,$$

$$G_z = \frac{1}{M} \int_L z f(x, y, z) ds.$$

Пример 1. Пресметнете

$$\int_L xy ds = ?$$

където L е частта от елипсата, находяща се в първи квадрант:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0.$$

Решение: Представяме първо в параметричен гладката линия-посочената четвърт част от елипсата:

$$x = a \cdot \cos t,\ y = b \sin t,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

.

$$x' = -a\sin t,\ y' = b\cos t,\ ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}t.$$

Използваме (21.6) за да пресметнем криволинейния интеграл от първи род

$$\int_L xyds = ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t \cdot \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt =$$

$$= ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1-\sin^2 t)}d(\sin t).$$

В последния интеграл правим сунституцията $\sin t = u$. Имаме

$$\int_L xyds = ab\int_0^1 u\sqrt{b^2 + (a^2-b^2)u^2}du =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)} \cdot \int_0^1 \sqrt{b^2 + (a^2-b^2)u^2}d\left(b^2 + (a^2-b^2)u^2\right) =$$

$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)} \cdot \left(b^2 + (a^2-b^2)u^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=0}^{u=1} = \frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)}.$$

Пример 2. Пресметнете криволинейния интеграл от първи род

$$I = \int_L (2z - \sqrt{x^2+y^2})ds,$$

където L е първата извивка от коничната витлова линия

$$\vec{r} = r(\vec{t}) = \underbrace{t\cos t}_{x(t)} \cdot \vec{i} + \underbrace{t\sin t}_{x(t)} \cdot \vec{j} + \underbrace{t}_{z(t)} \cdot \vec{k}.$$

Решение: От условието следва $0 \le t \le 2\pi$. Имаме

$$x'(t) = \cos t - t\sin t,\ y'(t) = \sin t + t\cos t,\ z'(t) = 1,\ ds = \sqrt{1+t^2}.$$

И така

$$I = \int_0^{2\pi} t\sqrt{1+t^2}dt = ... = \frac{1}{3}[(2+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}].$$

22. Криволинеен интеграл от втори род. Разглеждаме гладката линия $L \subset D-$ област в R^3. Аналогично се дефинира криволинеен интеграл по гладка линия в двумерния случай, затова тук ще разгледаме тримерния вариант. Нека линията L е зададена параметрично като:

$$\vec{r} = r(\vec{t}) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ t \in [\alpha, \beta]. \tag{22.1}$$

Както знаем тангенциалният вектор към т.$M(t) \in L$ се задава като

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Нека в D е дефинирано векторното поле F:

$$\vec{F} = (P, Q, R,) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}. \tag{22.2}$$

Делим линията $L = \widehat{AB}$ (разбиване τ) на n части чрез точки $A \equiv M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n \equiv B$, които се получават от (22.1) ако даваме последователно стойности на параметъра t:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,\ \ M_k = (x_k, y_k, z_k).$$

Върху всеки от сегментите $\widehat{M_{k-1}M_k}$, $k = 1, \ldots, n$ вземаме точка

$$(P_k, Q_k, R_k) := (P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)).$$

Да означим

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k := y_k - y_{k-1},\ \Delta z_k := z_k - z_{k-1}.$$

Образуваме следната Риманова сума:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta z_k\right]. \tag{22.3}$$

Ще поискаме $d(\tau) \to 0$, $n \to \infty$, т.е. максималната дължина на сегмент $\widehat{M_{k-1}M_k}$ клони към 0, а това е еквивалентно на

$$\max_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0,\ \max_{1 \le k \le n} \Delta y_k \to 0,\ \max_{1 \le k \le n} \Delta z_k \to 0.$$

Дефиниция на криволинеен интеграл от втори род. Търсим граница на редицата от Риманови суми , дефинирани в (22.3) при $d(\tau) \to 0$. Ако този $\lim\ \exists$ и е равен на числото I, то казваме, че съяествува криволинеен интеграл от втори род от векторна функция $\vec{F}(\vec{r})$ по гладката крива L и се бележи така:

$$I = \int_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int\limits_{\widehat{AB}} [P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz] \qquad (22.4)$$

Ще припомним, че ако тангентния вектор $\vec{t}$ към гладката линия L в точка, която се получава за стойност t на параметъра има директорни косинуси $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то имаме

$$\vec{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}$$

. Тогава от (22.4) установяваме следната връзка между криволинеен интеграл от втори и първи род, всъщност получаваме , че криволинейният интеграл от втори род (22.4) може да се пресметне като следния криволинеен интеграл от първи род":

$$I = \int_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_L \left(\vec{F}, \vec{t}\right)ds =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt. \qquad (22.5)$$

Формулата (22.5) е и практическото правило, което се прилага при конкретно пресмятане на криволинеен интеграл от втори род.

Свойства на криволинеен интеграл от втори род.

1. Приложение в механиката. Количеството работа I, която се извършва при преместване на материална точка по гладката линия L под действие на силата $\vec{F}$ се дава с криволинейния интеграл $I = \int_L \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$.

2. Ако сменим посоката на изменение по гладката линия, то се сменя и знака на криволинейния интеграл, т,е,

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(\vec{r})d\vec{r} = -\int\limits_{\widehat{BA}} F(\vec{r})d\vec{r}.$$

Това свойство отличава криволинейния интеграл от втори род от кр. интеграл от първи род, който не се променя при смяна на посоката по която се движи точката по линия L.

3.ако L е затворена крива, т.е. $A \equiv B$, то криволинейният интеграл от втори род се бележи като

$$I = \int_L \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \oint_L \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

. **Пример 1.** Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$I = \int_L x dx + y dy + (x + y - 1) dz,$$

ако L е отсечката, описана от т.$A(1,1,1)$ до т.$B(2,3,4)$.

Решение: Параметризираме отсечката така:

$$L := \left| \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t. \end{array} \right. , \ t \in [0,1].$$

Имаме $x' = 1$, $y' = 2$, $z' = 3$. Прилагаме формулата (22.5)

$$I = \int_0^1 [(1 + t) \cdot 1 + (1 + 2t) \cdot 2 + (1 + 3t) \cdot 3dt = \cdots = 13.$$

Пример 2. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$I = \oint_L xy^2 dy - yx^2 dx,$$

където L е окръжност, допираща се до оста O_x в т. O(0,0) и с център т.(0,1)., описана в положителна посока (обратна на часовниковата стрелка).

Решение: Уравнението на окръжността е

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

която можем да параметризираме като

$$\left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{array} \right. , \ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$

Имаме $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$. По формулата (22.5) имаме

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [\cos^2 t(1+\sin t)^2 + (1+\sin t)\cos^2 t \sin t] dt = \cdots = \frac{3\pi}{2}.$$

Връзка между криволинеен интеграл от втори род и двоен интеграл. Формула на Грийн. Ще докажен следната важна теорема:

Теорема 1. Нека $D \subset R^2$ е ограничена със затворената гладка линия L и в D е дадено векторното поле

$$\vec{F}(\vec{r}) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}.$$

Нека кривата L се обикаля в положителна посока (обратна на часовниковата стрелка). Тогава е в сила следната формула:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (22.6)$$

Доказателство: Ще докажем, че

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Qdy. \qquad (22.7)$$

Аналогично се доказва

$$\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L Pdx.$$

Нека да представим областта D с контур L като:

$$D := \left| \begin{array}{l} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{array} \right. .$$

Нека $\widehat{DAC} = x_1(y)$, $\widehat{CBD} = x_2(y)$. Имаме

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dx \right) dy =$$

$$= \int_c^d [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)]dy = \int\limits_{\overset{\frown}{CBD}} Q(x,y)dy + \int\limits_{\overset{\frown}{DAC}} Q(x,y)dy =$$

$$= \oint_L Qdy.$$

Доказателството е завършено. □

Следствие 1. Ако $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ за всяка т.$(x, y) \in D \ \Rightarrow$

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

Следствие 2. Ако във формулата на Грийн (22.6) положим $Q = x$, $P = 0$ получаваме

$$\oint_L xdy = \int\int_D 1 \cdot dxdy = S(D).$$

Ако положим сега $Q = 0$, $P = y$ получаваме

$$\oint_L ydx = -\int\int_D 1 \cdot dxdy = -S(D).$$

Изваждаме последните две равенства и получаваме следната формула за смятане лице на равнинна фигура с криволинеен интеграл от втори род взет по контура на фигурата:

$$S(D) = \frac{1}{2}[\oint_L xdy - ydx]. \tag{22.8}$$

Пример 3. Дадена е затворената крива (астроида) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Пресметнете лицето на фигурата заградена от графиката на тази линия.

Решение: Параметризираме линията като:

$$\left| \begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \end{array} \right. \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Имаме $dx = -3a\cos^2 t \sin t,\ dy = 3a\sin^2 t \cos t$. Прилагаме (22.8) и получаваме

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left[a\cos^3 t 3a\sin^2 t\cos t + 3a\sin^3 t a\cos^2 t\sin t\right] dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

Криволинейни интеграли независещи от пътя на интегриране.

Нека разгледаме първо двумерния случай. Дадени са точки $A, B \in R^2$ и линия L, която свързва A с B. Нека L_1 е една произволна друга линия, която свързва A с B. Дадено е векторно поле $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$. Казваме, че интегралът от A до B не зависи от пътя на интегрирарне, ако

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{L_1} Pdx + Qdy.$$

Ако $L \cup L_1 = \Gamma$-затворенаа линия, то следва

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy = 0.$$

Последното равенство ще бъде изпълнено за произволна затворена крива Γ , свързваща точките A и B. Ако векторното поле $\vec{F} = (P,Q)$ е потенциално, т.е. съществува скаларна функция (потенциал на $\vec{F}$) $U(x,y)$, така че

$$dU = Pdx + Qdy,$$

то ще имаме

$$\int_A^B Pdx + Qdy = \int_A^B dU = U(B) - U(A), \Rightarrow \oint_\Gamma Pdx + Qdy = 0.$$

Получаваме, че интегралът не зависи от пътя на интегриране. Вярно е и обратното твърдение, което ще формулираме като следната

Теорема 2. Ако за произволни точки A, B интегралът $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ не зависи от пътя на интегриране, то векторното поле $\vec{F} = (P,Q)$ е потенциално.

Тази теорема ще приемем без доказателство, но само ще отбележим, че потенциалът $U(x,y)$ на полето $\vec{F}$ се намира по формулата

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt,$$

където т.$(x_0, y_0) \in L$ а (x,y) е произволна точка. По подобен начин нещата се обобщават и в тримерния случай. Тук ще формулираме следната теорема

Теорема 3. Нека точки $A, B \in R^3$ лежат на затворена гладка линия Γ и в област $D \ni \Gamma$ е дефинирано векторното поле $\vec{F} = (P, Q, R)$. Следните 4 твърдения са еквивалентни:

I. Криволинейният интеграл $\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$ не зависи от пътя на интегрирарне.

II. Върху всяка затворена крива Γ минаваща през точките A, B криволинейният интеграл е 0

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

III. Векторното поле $\vec{F}$ е потенциално, т.е съяествува отенциал $U(x,y,z)$, така че

$$dU = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

IV. Имаме, че за всяка т.$(x,y,z) \in D$ е изпълнено

$$rot(\vec{F}) = \vec{0}.$$

Ще отбележим, че в случай на потенциално векторно поле, функцията U се намира по формулата

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y,z)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z)dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt.$$

Пример 4. Нека точките $A(1.2)$ и $B(3,4)$. Нека L е тази част от окръжността, монаваща през точките $A, B, C(2,3)$, върху която лежи т.C. Пресметнете криволинейнищт интеграл от втори род

$$\int_L xy^2dx + x^2ydy = ?$$

Решение: Преди да се опитваме да параметризираме тази дъга от въпросната окръжност, нека да проверим дали случайно този интеграл не зависи от пътя на интегриране. Ако това е така, то вместо дъгата L можем просто да вземем отсечката с начало т.А и край т.B, която се параметризира далеч по-лесно.Имаме

$$P(x,y) = xy^2,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy,\ Q(x,y) = x^2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy.$$

Имаме $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Следователно интегралът не зависи от пътя на интегрирарне съгласно формулата на Грийн. Отсечката AB се параметризира така

$$\left| \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t, \end{array} \right. \quad t \in [0, 1]$$

Тогава по (22.5) имаме

$$I = \int_0^1 \left[(1+2t)(2+2t)^2 \cdot 2 + (1+2t)^2(2+2t) \cdot 2\right] dt = \ldots..$$

23. Повърхнинен интеграл от I ви род.

1. Параметрично задаване на повърхнината.

Нека повърхнината S е зададена параметрично като

$$S : \left| \begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{array} \right., \ (u,v) \in D \subset R^2.(23.1)$$

2. Явно задаване на повърхнината S. Нека сега S е зададена с уравнението

$$S : z = z(x,y),\ (x,y) \in D \subset R^2. \tag{23.2}$$

Лесно мижем да преминем към параметричен вид като положим

$$x = u,\ y = v,\ z = z(u,v).$$

3. Неявно-зададена повърхнина. Тук S се задава чрез неявната функция $z = z(x,y)$ от общото алгебрично уравнение

$$F(x,y,z) = 0,$$

като предполагаме, че са налице условията за съществуване на неявна функция.

Дефиниция 1. Казваме, че повърхнината S е гладка, ако във всяка т. от S, която се получава за $(u, v) \in D$ рангът на матрицата

$$rank \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2.$$

Нека $f(x, y, z)$ е непрекъсната функция за всяко $M(x, y, z) \in S$. Делим повърхнината S на n части σ_i, $1 \leq i \leq n$ и с $S(\sigma_i)$ бележим лицето на сегмента σ_i. Върху сегмента σ_i вземаме т.$M(x_i, y_i, z_i)$ и образуваме следната Риманова сума

$$\sigma_n := \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S(\sigma_i).$$

Нека $d(n) := \max S(\sigma_i)$, $1 \leq i \leq n$ е диаметърът на това разделпна на сегменти.

Дефиниция 2. Ако съяествува $\lim\limits_{d(n)\to 0} = I$-крайно число, казваме че I е повърхнине интеграл от първи род по S от функцията f и бележим като

$$I = \int\int_S f(x, y, z) dS. \tag{23.3}$$

Ако повърхнината S е зададена параметрично изчисляваме

$$I = \int\int_D F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{23.4}$$

Ако повърхнината е зададена явно, то имаме $\vec{r_u} = (1, 0, z_x)$, $\vec{r_v} = (0, 1, z_y)$. Гаусовите елементи се изчисляват като

$$F = z_x \cdot z_y,\ E = 1 + z_x^2,\ G =! + z_y^2.$$

Тогава по (23.4) получаваме

$$I = \int\int_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy. \tag{23.5}$$

Ако повърхнината S е зададена неявно, то използвайки формулите за частните производни на неявната функция $z = z(x, y)$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z},\ z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

от (23.5) получаваме

$$I = \int\int_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\frac{dxdy}{|F_z|}. \tag{23.6}$$

Свойства на повърхнинния интеграл от първи род.

1. Линеен и позитивен функционал, т.е.

$$\int\int_S (c_1 f + c_2 g) dS = c_1 \int\int_S f dS + c_2 \int\int_S g dS.$$

$$\int\int_S f dS \geq 0, \text{ ако } \ f(x, y, z) \geq 0, \text{ за всяко } M(x, y, z) \in S.$$

2. Неравенство на триъгълника.

$$\left|\int\int_S f dS\right| \leq \int\int_S |f| dS.$$

3. Теорема за средните стойности.

$$\int\int_S f dS = f(M) \cdot S.$$

Основното приложение на повърхнинния интеграл от първи род е, че с него се пресмята лицето на повърхнина, т.е. ако $f \equiv 1$, то

$$\int\int_S 1 \cdot dS = S. \tag{23.7}$$

Ако S е затворена повърхнина, то интеграла по S се бележи

$$I = \oint_S f dS.$$

4. Ако $S = S_1 \cup S_2$, като S_1 и S_2 имат най-много обща линия на сечението си, то

$$\int\int_S f dS = \int\int_{S_1} f dS + \int\int_{S_2} f dS.$$

Пример 1. Пресметнете пълната поверхнина на централна сфера с радиус R.

Решение: От уравнението на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, определяме $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Ще използваме (23.5). Достатъчно е да пресметнем лицето само на горната половина от сферата ($S_+ = z \geq 0$). Имаме

$$S = 2R \int\int_D \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

където $D : x^2 + y^2 = R^2$. В последния двоен интеграл правим полярна смяна

$$S = 2R \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho d\varphi =$$

$$= -2R\pi \int_0^R \left(R^2 - \rho^2\right)^{-\frac{1}{2}} d(R^2 - \rho^2) = -4R\pi \cdot (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} =$$

$$= 4\pi R^2.$$

Допирателна равнина и нормала към повърхнина. Нека повърхнината S е зададена параметрично

$$S : \vec{r} = \vec{OM} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}. (23.8)$$

Нека $M(u_0, v_0) \in S$ и съответните u и v линии през т.М са $\vec{r}(u, v_0)$, $\vec{r}(u_0, v)$. Означаваме тангенциалните вектори към тези две линии като $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$. Да образуваме тяхното векторно произведение

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v. \tag{23.9}$$

Този вектор се нарича **нормален вектор** към повърхнината S в т.М. От аналитична геометрия знаем, че координатите му се пресмятат така

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \vec{i}(y_u z_v - y_v z_u) - \vec{j}(x_u z_v - z_u x_v) + \vec{k}(x_u y_v - x_v y_u).$$

Дефиниция 3. Тангенциална равнина τ към повърхнината S в т. $M(u_0, v_0) = M(x_0, y_0, z_0) \in S$ е равнината, която минава през т.М и има за нормален вектор $\vec{N}$, дефиниран чрез (23.9). Знаем от аналитичната геометрия, че такова уравнение на τ е:

$$\tau : \begin{vmatrix} \xi - x_0 & \eta - y_0 & \zeta - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0.$$

Ако имаме неявно-зададена повърхнина $S : F(x, y, z) = 0$, то нормалният вектор е $\vec{N} = (F_x, F_y, F_z)$. Тогава тангенциалната равнина е с уравнение

$$F_x(\xi - x_0) + F_y(\eta - y_0) + F_z(\zeta - z_0) = 0.$$

Ако имаме явно-зададена повърхнина $S : z = z(x, y)$, то нормалният вектор според (23.9) е $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1)$. Тогава имаме

$$\tau : -z_x(\xi - x_0) - z_y(\eta - y_0) + z - z_0 = 0.$$

24.Повърхнинен интеграл от втори род. Нека имаме гладка двустранна повърхнина S, зададена по някой от трите начина, описани в предния въпрос-параметрично, явно или като неявно-зададена повърхнина. Двустранна ще рече, че имаме външна и вътрешна страна-напр. сфера, елипсоид, конус, цилиндър. Обикновено за положително -ориентирана повърхнина S_+ приемаме тази страна на повърхнината, за която нормалния вектор се задава по някой от трите начина, описани в предишния въпрос. Понякога се използва и паравилото на дясната ръка- палецът на свитата ръка е "колинеарен"с нормалния вектор $\vec{N}$. Нека върху S е дефинирано векторното поле

$$\vec{F}(\vec{r}) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Нека $\vec{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ е нормален вектор към външната страна на S (S_+).

Дефиниция 1. Повърхнинен интеграл от втори род от $\vec{F}$ по повърхнината S_+ се дефинира като следния интеграл от първи род

$$I = \iint\limits_{S_+} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)\, dS =$$

$$= \iint\limits_{S_+} (\vec{F}, \vec{N}) dS =$$

$$= \iint\limits_{S_+} P dydz + Q dzdx + R dxdy. \tag{24.1}$$

В конкретни примери повърхнинният интеграл от втори род се свежда до пресмятане на двоен интеграл. Преди да разгледаме конкретни примери ще кажем, че ако през повърхнината S преминава вещество (течност, ел. поле) обемната скорост на което във всяка точка (x, y, z) от повърхнината се определя от векторното поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ и се интересуваме да се определи потока (дебит) на веществото през повърхнината. Този поток се дава точно с повърхнинният интеграл от втори род (24.1). Нека да видим как се прилага (24.1) в зависимост от начина на задаване на повърхнината.

1.Параметрично задаване на S**.** Тогава нормалният вектор $\vec{N}$ се дава като

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

От горното представяне лесно се пресмятат съответните директорни косинуси на нормалния вектор

$$\cos\alpha = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Аналогично се пресмятат и останалите два директорни косинуса. Използваме, че $dS = \sqrt{EG - F^2} dudv$, $(u, v) \in D$. тогава според първата формула в (24.1) повърхнинния интеграл от втори род се пресмята като следния двоен интеграл

$$I = \iint\limits_{D} [P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot (y_u z_v - y_v z_u) + Q(\dots)(\dots) + R(\dots)(\dots)] dudv. \tag{24.2}$$

2. Явно задаване на S**.** Нека $S : z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. Тогава

$$\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}.$$

$$dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}.$$

Тогава повърхнинният интеграл се смята като

$$I = \int\int_D \left[P(x,y,z(x,y))(-z_x) + Q(x,y,z(x,y))(-z_y) + R(x,y,z(x,y)) \cdot 1\right] dxdy. \tag{24.3}$$

2. Неявно задаване на S. От $F(x,y,z) = 0$ определяме като неявна функция $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$, ако са налице условията за това. Знаем, че

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z},\ z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Сега заместваме в (24.3) и получаваме

$$I = \int\int\limits_D \left(P\frac{F_x}{F_z} + Q\frac{F_y}{F_z} + R \cdot 1\right) dxdy. \tag{24.5}$$

Пример 1. Пресметнете повърхнинния интеграл от втори род

$$I = \int\int\limits_{S_+} zdxdy,$$

където S_+ е външната страна на елипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение: Поради съображения за симетрия достатъчно е да разгледаме горната половина от елипсоида $z \geq 0$. Имаме явно задаване на S

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

От условието на задачата следва $P = Q = 0,\ R = z$. Тогава ако ортогоналната проекция на елипсоида в O_{xy} е елипсата

$$D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то задачата се свежда до

$$I = 2c\int\int_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy.$$

За да пресметнем последния интеграл правим обобщена полярна смяна

$$\left| \begin{array}{c} = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{array} \right|, \; J = ab\rho.$$

Тогава имаме

$$I = 2abc \int_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\varphi = \cdots = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Пример 2. Пресметнете повърхнинния интеграл

$$I = \int\int_S xzdzdy + xydxdz + yzdxdy,$$

където S е външната страна на пирамидата със стени $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

Решение: Ако означим върховете на пирамидата $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), O(0,0,0)$. Тогава

$$I = \int\int\limits_{\widehat{ABC}} + \int\int\limits_{\widehat{OBC}} + \int\int\limits_{\widehat{AOC}} + \int\int\limits_{\widehat{ABO}} .$$

Лесно се съобразява,че последните три интеграла , взети върху триъгълниците, лежащи в трите координатни равнини, са 0.(Защо?) Остава да пресметнем интеграла върху наклонената стена на пирамидата с уравнение $D : x + y + z = 1$. Нормалният вектор към тази стена е $\vec{N} = (1,1,1)$. Тогава

$$I = \int\int_D \left[x(1-x-y)\cdot 1 + xy \cdot 1 + y(1-x-y)\cdot 1\right] dxdy =$$

$$= \int\int_D [x - x^2 + y - xy - y^2] dxdy = \int_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} [x - x^2 + y - xy - y^2] dy \right) dx =$$

$$= -\frac{5}{24}.$$

25. Формули на Гаус-Остроградски и Стокс.

1.Формула на Гаус-Остроградски.(Пресмятане на повърхнинен интеграл от втори род по затворена двустранна повърхнина S чрез троен интеграл взет от $div\vec{F}$ по тялото T, заградено от S.)

Нека S е затворена двустранна повърхнина и тялото T е представено като

$$T : \begin{cases} z_1 \leq z \leq z_2 \\ (x, y) \in D. \end{cases}.$$

T е такова тяло, че всяка права $\|\, O_x, O_y, O_z$ пресича S най-много в две точки-(цилиндрично тяло по отношение на трите оси). Нека е зададено векторното поле

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Предполагаме, че P, Q, R са непрекъснати заедно с първите си частни производни в T.

Теорема на Гаус-Остроградски. В сила е следното равенство при предположенията направени по-горе

$$\int\int_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \int\int\int\limits_T \left(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}_{=div\vec{F}} \right) dxdydz. \tag{25.1}$$

Идея за доказателството. Преработва се дясната страна, за да се докаже че е равна на лявата. Ще го проверим като докажем,че

$$\int\int\limits_S Rdxdy = \int\int\int\limits_T \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz. \tag{25.2}$$

Аналогично се проверява равенството и на другите две събираеми. Дясната страна на (25.2) е равна на

$$\int\int\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)dz \right) dxdy =$$

$$= \int\int\limits_D \left[R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))\right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} Rdxdy.$$

Доказателството е завършено. $\square$

Пример 1. Пресметнете повърхнинния интеграл от втори род

$$I = \iint\limits_{S} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$$

където S е външната страна на сферата $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$.

Решение: По формулата на Гаус-Остроградски (25.1) имаме

$$I = \int\int\int_T (2x+2y+2z)dxdydz,$$

където T е кълбото загарадено от дадената сфера. За да пресметнем последния интеграл правим сферична смяна на променливите

$$\left| \begin{array}{l} x = a + \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + \rho\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \quad J = \rho^2\sin\theta. \\ z = c + \rho\cdot\cos\theta, \end{array} \right.$$

Интервалите за изменение на сферичните координати са $0 \le \rho \le R$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Имаме последователно

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R} \big[(a+b+c) + \rho[\sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)+\cos\theta]right]\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \cdots = \frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

Пример 2. Пресметнете

$$I = \iint\limits_{S} x^3dydz + y^3dxdz + z^2dxdy,$$

където S е долната страна от частта на елипсоида $z = x^2+y^2$, отсечена от равнината $\alpha : z = 2x$.

Решение: Допълваме S с частта от равнината α, която е вътре в параболоида, за да се получи затворена повърхнина. Означаваме тази част от равнината с Φ. Така $S \cup \Phi$ образува затворена повърхнина, заграждаща тяло T, за които прилагаме формулата на Гаус-Остроградски. За Φ нормалния вектор е $\vec{N} = (2, 0, -1)$. Остава да проверите, че

$$I = \underbrace{\int\int\int_T div\vec{F}dxdydz}_{=\frac{11}{3}\pi} - \underbrace{\int\int_\Phi x^3dydz + y^3dxdz + z^2dxdy}_{=\frac{3}{2}\pi} = \frac{13}{6}\pi.$$

2. Формула на Стокс. (Потокът на векторно поле през ориентирана повърхнина S е равен на циркулацията на векторното поле по контура L на S).

Нека L е контурът на гладката повърхнина S, ($\exists \vec{N}$ във всяка т. от S.). Нека $A \in L$. Застанали сме в т. А като посоката от краката към главата да е същата като на $\vec{N}(A)$. За полжителна посока на обикаляне по $L\,(L+)$ се приема тази, при която като се движим по L повърхнината S да остава винаги от лявата ни страна. Тогава говорим за ориентирана повърхнина S , съгласувана с посоката на обикалщне по L. Нека е дадено векторното поле

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Формула на Стокс.

$$\int\limits_S\int (rot\vec{F}, \vec{N})dS =$$

$$= \int\limits_S\int \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \oint\limits_{L+} Pdx + Qdy + rdz. \qquad (25.3)$$

Следствие. Формулата на Грийн се получава от формулата на Стокс при $R \equiv 0$.

Пример 3. Пресметнете

$$I = \oint\limits_{L+} ydx + z^2dy + x^2dz,$$

ако L е окръжността, по която се пресичат сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и равнина $z = \sqrt{3}$, при която посоката на обикаляне по L е противоположната на часовниковата стрелка, гледано от т(0,0,2).

Решение: Криволинейният интеграл от втори род I можем да пресметнем по два начина:

I начин.Директно параметризираме линията L като

$$\left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sqrt{3} \end{array} \right. \quad dz = 0,\ t \in [0, 2\pi].$$

Тогава

$$I = \int\limits_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) + 3\cos t]dt = \cdots = -\pi.$$

II. начин. С използване формулата на Стокс. За повърхнина S с контур L можем вместо частта от сферата да вземем частта от равнината $\alpha : z - \sqrt{3} = 0,\ \vec{N} = 0, 0, 1)$. Тогава по формулата на Стокс (25.3) имаме

$$I = \int\int\limits_{\alpha} ((-2z, -2x, -1) \cdot (0, 0, 1))\, dS = -\int\int\limits_{\alpha} dS = -\pi.$$