

ИРИНА КЕРЕЛЕЗОВА

ЗАПИСКИ

по

**ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА
И ПЛАСТИЧНОСТТА**

за специалност
„Строителство на транспортни съоръжения”

2013

ИРИНА КЕРЕЛЕЗОВА

ЗАПИСКИ

по

**ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА
И ПЛАСТИЧНОСТТА**

за специалност
„Строителство на транспортни съоръжения”

2013

Записки по теория на еластичността и пластичността

Автор гл. ас. д-р инж. **Ирина Георгиева Керелезова**

Националност: българска

Първо издание

Формат: електронна книга .pdf

Сайт : www.uacg.bg

Издадена от

Университет по архитектура, строителство и геодезия

Университетски изчислителен комплекс

Сектор „Издателска дейност”

Всички права запазени. Това издание и отделни негови части не могат да бъдат размножавани, публикувани или възпроизвеждани по електронен, механичен или друг начин без писменото разрешение от автора.

© **Ирина Керелезова 2013**

ISBN 978-954-724-059-9



**УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА,
СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ**

УНИВЕРСИТЕТСКИ ИНФОРМАЦИОНЕН КОМПЛЕКС
Сектор "ИЗДАТЕЛСКА ДЕЙНОСТ"

СЪДЪРЖАНИЕ

ГЛАВА 1

ОСНОВНИ ПРЕДПОСТАВКИ И ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ..СТР 3

ГЛАВА 2

ТРИМЕРНА ЗАДАЧА НА ТЕОРИЯ НА
ЕЛАСТИЧНОСТТА.....СТР 5

ГЛАВА 3

ГЕОМЕТРИЧНА ТЕОРИЯ НА ДЕФОРМАЦИИТЕ.....СТР 16

ГЛАВА 4

ЛИНЕЙНА ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА.....СТР 22

ГЛАВА 5

РАВНИННА ЗАДАЧА НА ТЕОРИЯ НА
ЕЛАСТИЧНОСТТА.....СТР 28

ГЛАВА 6

МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА РАВНИННАТА ЗАДАЧА НА
ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА.....СТР 37

ГЛАВА 7

ТЕОРИЯ НА ТЪНКИТЕ КОРАВИ ПЛОЧИ.....СТР 47

ГЛАВА 8

ЕНЕРГЕТИЧНИ ПРИНЦИПИ И МЕТОДИ, ИЗПОЛЗВАНИ В
ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА.....СТР 59

ГЛАВА 9

МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ В РАВНИННАТА
ЗАДАЧА НА ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА.....СТР 66

ГЛАВА 10

МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ В ЗАДАЧАТА ЗА
ТЪНКИ ПЛОЧИ.....СТР 86

ГЛАВА 11

ВЪВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЯ НА ПЛАСТИЧНОСТТА.....СТР 92

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА.....СТР 109

ПРЕДГОВОР

Настоящите записки са разработени за подпомагане на студентите от транспортния факултет, специалност „Строителство на транспортни съоръжения“, при изучаване на дисциплината „Теория на еластичността и пластичността“. Съдържанието на записките е съобразено с учебния план на тази дисциплина за транспортния факултет.

Записките трябва да се разглеждат като неразделна част от лекционния курс. Изучаването на материала на база само на представените записки би било трудно без да са изслушани лекциите към курса.

Авторът изказва специалната си благодарност на доц. д-р инж. Георги Тодоров за пълноценните и ползотворни редакции на представените записки.

Въпреки направените редакции, в записките вероятно съществуват пропуски и грешки. Авторът с благодарност ще приеме всички препоръки и корекции, целящи да подобрят качеството на настоящата работа.

От автора

ГЛАВА 1

ОСНОВНИ ПРЕДПОСТАВКИ И ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

Основни хипотези

1. Хипотези по отношение на материала:
 - материалът е идеално еластичен – след премахване на натоварването тялото възвръща формата си, а напреженията и деформациите в него се нулират;
 - материалът е изотропен – във всички направления има еднакви механични свойства;
 - материалът е хомогенен (еднороден) – във всички точки има еднакви механични свойства;
 - връзката между напрежения и деформации е линейна;
 - материалът е с непрекъсната структура – функциите за преместванията, деформациите и напреженията се приемат непрекъснати и гладки.

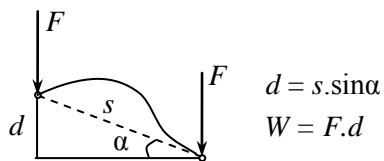
2. Хипотези по отношение на преместванията и деформациите, получени от външното натоварване:
 - Преместванията, получени вследствие на външното натоварване, са малки в сравнение с най-малкия размер на тялото;
 - деформациите са малки в сравнение с единица;
 - тялото се намира в естествено напрегнато състояние – при липсата на външен товар отсъстват напрежения и деформации.

3. Хипотези по отношение на външното натоварване:
 - товарите са разпределени по повърхността на тялото;
 - концентрираните товари са разпределени върху много малка площ в сравнение с размерите на тялото;
 - обемните сили са константно разпределени по обема на тялото;
 - всички товари са консервативни.

Определение за консервативни сили:

Една сила се нарича консервативна, когато работата, която извършва, зависи само от началното и крайното положение на нейната приложна точка. Извършената работа не зависи от начина на преход от едното положение до другото (фиг. 1.1).

Работата на консервативна сила е равна на големината на силата по проектираното преместване на приложната ѝ точка.



Фигура 1.1 Определение за консервативна сила.

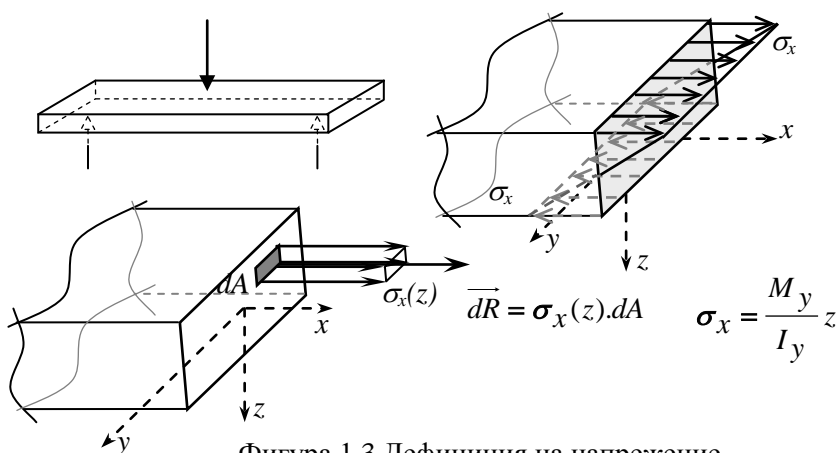
- в сила е принципа на Сен-Венан: ако върху част от повърхнината на тялото е приложен взаимно-уравновесен товар, то напрегнатото и деформирано състояние има локален характер – разпростира се в малка околност (фиг.1.2).



Фигура 1.2 Принцип на Сен-Венан.

Определение за напрежение:

Известно е, че в една греда, работеща на огъване, има огъващ момент M_y . Той от своя страна е палучен от редукция на напреженията σ_x (фиг.1.3).



Фигура 1.3 Дефиниция на напрежение.

Ако се избере произволна малка площадка с площ dA от сечението на гредата (фиг.1.3) и се направи редукция на вътрешните сили, тогава в тази област ще се получи главен вектор \vec{dR} . Главният им момент се пренебрегва, защото площадката е с много малки размери. Тогава отношението $\frac{\vec{dR}}{dA}$ се нарича средно напрежение:

$$\vec{p}_{cp} = \frac{\vec{dR}}{dA}.$$

Същият извод важи, ако площадката е с произволна нормала n . Пълното напрежение е равно на границата на средното напрежение, ако тя съществува, при $dA \rightarrow 0$ и се изразява по следния начин:

$$\vec{p}_n = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{\vec{dR}}{dA}. \quad (1.1)$$

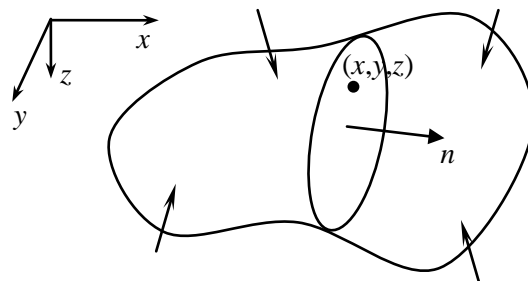
Индексът n съответства на направлението на външната нормала, която ориентира площадката. Напрежението зависи от мястото на площадката, т.е. от координатите x, y и z и от нейната ориентация, т.е. от направлението на нормалния към площадката вектор \vec{n} .

ГЛАВА 2

ТРИМЕРНА ЗАДАЧА НА ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА

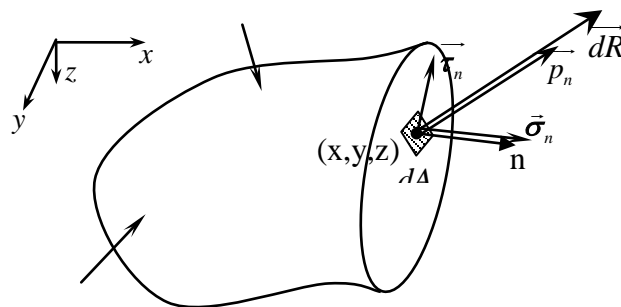
Теория на напреженията

За да бъде изследвано дадено тяло в пространството под действието на известно натоварване трябва да са известни неговите физически характеристики, начинът на подпирание и външното натоварване. Под действието на това натоварване тялото се е деформирало и е в равновесие.



Фигура 2.1 Тяло, намиращо се в равновесие.

Избирана е площадка с нормала \vec{n} като се задават координатите x , y и z на нейната точка. Нормалата е единствена и достатъчна за определяне на направлението на площадката. Тялото се разрязва с равнина съдържаща тази площадка и се разделя – фиг. 2.1. Даденото тяло е в равновесие. Силите, които действат върху него образуват уравновесена система. Всяка от изрязаните части от тялото са в равновесие под действието на външните и вътрешните сили. Вътрешните сили се изразяват чрез пълното напрежение и неговите компоненти в площадката с нормала \vec{n} – фиг. 2.2.



Фигура 2.2 Пълно напрежение в площадка с нормала \vec{n} .

Пълното напрежение в околност на точката с координати (x, y, z) , лежаща в площадка с нормала \vec{n} е:

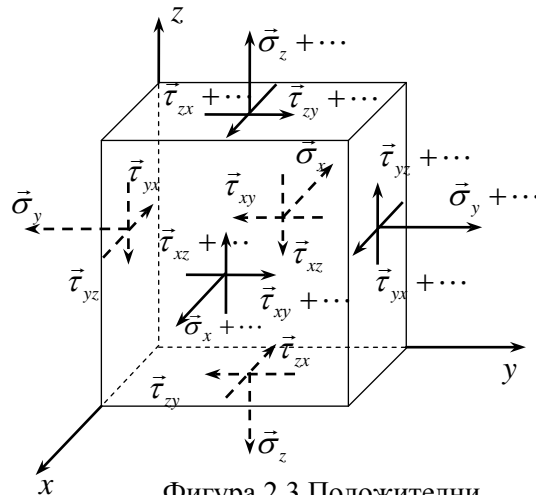
$$\vec{p}_n(x, y, z) = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{R}}{dA}. \quad (2.1)$$

Означения на напреженията върху характерни площадки

Както беше споменато в предходната глава пълното напрежение може да се представи чрез неговите компоненти – тангенциалните и нормалните напрежения. За да се изследва тялото по-лесно за различните видове напрежения, се разглеждат площадки с нормали успоредни на осите на координатната система. Тогава пълното напрежение, което действа върху площадка с нормала, успоредна на оста Ox е \vec{p}_x , а неговите компоненти са нормалното напрежение $\vec{\sigma}_x$ и тангенциалното $\vec{\tau}_x$. Тангенциалното напрежение от своя страна може да се разложи на компоненти успоредни на координати оси y, z – формула (2.2):

$$\vec{\tau}_x = \vec{\tau}_{xy} + \vec{\tau}_{xz}. \quad (2.2)$$

По този начин, ако в околност на една точка от тялото се дефинират площадки, успоредни на координатните равнини, се получават напреженията в околността на една вътрешна точка от тялото, показани на фиг. 2.3. За положителни се приемат посоки на напреженията, съгласно фиг. 2.3.



Фигура 2.3 Положителни посоки на напреженията.

На фиг. 2.3 стойностите на напреженията са показани схематично.

Ако външната нормала на площадката съвпада с положителната посока на координатната ос, то компонентите на пълното напрежение са положителни, ако посоките им съвпадат с положителните посоки на координатните оси.

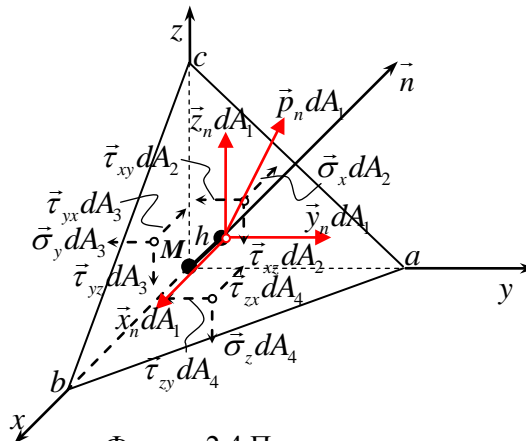
Ако външната нормала на площадката е обратна на положителната посока на координатната ос, то компонентите на пълното напрежение са положителни, ако посоките им са обратни на положителните посоки на координатните оси.

Зависимости на напрежението от ориентацията на площадката. Условието на повърхността

Съвкупността от напреженията, които действат върху всевъзможните площадки, минаващи през дадена точка, определя напрегнатото състояние в тази точка. Ако са познати напреженията само в една площадка, минаваща през дадената точка, то се говори за напрежения в площадката, а не за напрежения в точка.

За да се определят напреженията в площадката с произволен наклон, минаваща през дадена точка е достатъчно да се познават напреженията в три взаимно перпендикулярни площадки, минаващи през същата точка. За целта се разглеждат три взаимно перпендикулярни площадки, минаващи през точка M . Напреженията върху тези площадки се считат за известни. Наклонената площадка се приема с приближение, че се намира на определено разстояние h от точката M . Така се получава една пирамида с много малки размери, за която се записват условия за равновесие.

За да се изразят напреженията в произволна площадката е необходимо да бъдат известни посочените косинуси на външната нормала \vec{n} . За удобство косинусите са означени по следния начин: $\cos(n, x) = l$, $\cos(n, y) = m$, $\cos(n, z) = n$, където x , y и z са координатните оси, които са приложени в общата точка M на взаимно перпендикулярните площадки. Пълното напрежение върху тази площадка ще има компоненти по координатните оси x_n , y_n и z_n – фиг. 2.4.



Фигура 2.4 Пълно напрежение върху наклонена площадката.

По-подробна подробен извод на следващите изрази може да бъде намерен в [1] и [2].

За този елементарен обем се записват условията за равновесие:

$\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum Z = 0$. Като се пренебрегне нарастването на напреженията, причинено от нарастването на координатите на приложените им точки (от т. M до т. M') и се извърши граничният преход $h \rightarrow 0$, се получават следните изрази:

$$\begin{aligned} x_n &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ y_n &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ z_n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (2.3)$$

Това са изрази за компонентите на пълното напрежение върху площадката с нормала \vec{n} и минаваща през точка M .

От условията за равновесие

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0$$

се получават изразите:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (2.4)$$

Израз (2.4) представлява известната теорема за взаимност на тангенциалните напрежения.

Изразът за компонентите на пълното напрежение върху площадка с нормала \vec{n} , записан в матрична форма, има вида:

$$\vec{p}_n = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

където \vec{p}_p е еднородна линейна векторна функция на \vec{n} . Ако са известни шестте напрежения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (тук е взета предвид взаимността на тангенциалните напрежения (2.4)) върху три взаимноперпендикулярни площадки минаващи през една точка то напрегатото състояние в точката е напълно определено. Матрицата в израз (2.5)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

се нарича тензор на напреженията.

Ако точка M лежи на повърхността на тялото тогава компонентите x_n, y_n и z_n се представляват компоненти на външното натоварване означени с X_p, Y_p, Z_p , а израз (2.5) добива вида:

$$\begin{aligned} X_p &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_p &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_p &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (2.6)$$

Изрази (2.6) дават връзка между напреженията вътре в областта и външното натоварване. По тази причина се наричат условия на повърхността.

Главни напрежения и главни площадки. Екстремни стойности на напреженията

Тензорът на напреженията представлява оператор, с помощта на който се извършва линейно преобразуване на единичния вектор \vec{n} с компоненти l, m и n , приложен в произволна точка $M(x, y, z)$ на деформируемото тяло, във вектор напрежение \vec{p}_p . Ако се оставят посочените косинуси l, m и n да се менят, то нормалата \vec{n} ще се върти около началната си точка M . При линейното преобразуване векторът \vec{p}_p мени както посоката си така и големината си.

Измежду безбройните вектори \vec{p}_p съществува такъв, че при преобразуването той не изменя направлението си, а само големината си. Такъв е векторът \vec{p}_p , които остава колинеарен на вектора \vec{n} преди и след преобразуването. В този случай напрежението \vec{p}_p се нарича главно напрежение. То е равно на нормалното напрежение σ_p , а тангенциалното τ_p е равно на нула. Площадката, която съответства на главното напрежение \vec{p}_p и е с нормала \vec{n} , колинеарна на \vec{p}_p се нарича главна площадка. Математическият израз на условието за колинеарност на векторите \vec{p}_p и \vec{n} има вида:

$$\begin{aligned}\bar{x}_n &= \sigma.l \\ \bar{y}_n &= \sigma.m, \\ \bar{z}_n &= \sigma.n\end{aligned}\quad (2.7)$$

където σ е скалар.

За да се определят стойностите на главните напрежения и направленията на главните площадки се постъпва по следния начин: Заместват се условията за колинеарност (2.7) в изразите за проекциите на пълното напрежение (2.3) на площадка с нормала \vec{n} и се получават изразите:

$$\begin{aligned}\sigma.l &= \sigma_x.l + \tau_{yx}.m + \tau_{zx}.n \\ \sigma.m &= \tau_{xy}.l + \sigma_y.m + \tau_{zy}.n, \\ \sigma.n &= \tau_{xz}.l + \tau_{yz}.m + \sigma_z.n\end{aligned}\quad (2.8)$$

или

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}.m + \tau_{zx}.n &= 0 \\ \tau_{xy}.l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}.n &= 0. \\ \tau_{xz}.l + \tau_{yz}.m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0\end{aligned}\quad (2.9)$$

Тук неизвестни величини са: σ_x , σ_y , σ_z , σ , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , l , m и n .

Посочените косинуси не могат да бъдат едновременно равни на нула. За тях е изпълнено равенството:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (2.10)$$

Системата уравнения (2.9) е хомогенна и има ненулево решение, ако детерминантата от коефициентите е равна на нула:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0. \quad (2.11)$$

От гледна точка на математическия анализ това е задача за собствени числа и вектори. Тъй като тензорът на напреженията е симетричен, то неговите собствени стойности са реални. След развитие на детерминантата получаваме уравнението:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.12)$$

където

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_1 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Числата I_1 , I_2 и I_3 се наричат инварианти на тензора на напреженията, тъй като те не се менят при смяна на координатната система. От характеристичното уравнение (2.12) се получават трите главни напрежения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. От свойствата на корените на кубичното уравнение (2.12), лесно може да се докаже, че:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1,$$

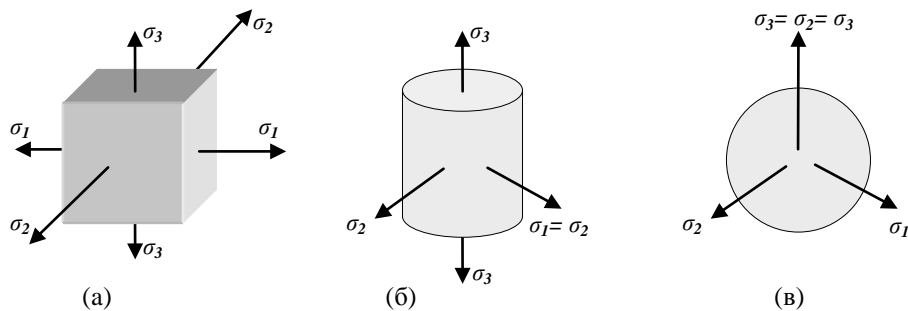
$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$
(2.14)

където σ_1 , σ_2 и σ_3 са корени на (2.12). Тъй като σ_1 , σ_2 и σ_3 са главните нормални напрежения, то тангенциалните напрежения в тези площадки са нула.

Уравнение (2.12) би трябвало да е същото при всеки избор на координатната система. Подробен анализ на главните напрежения е направен в [1], [2] и [4].

Без да се представят доказателства, ще бъдат отбелязани следните факти:

- Ако се замени σ_1 , σ_2 и σ_3 в (2.12) и след използването на тъждеството $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, може да се определят компонентите (l , m , n) на единичния нормален вектор $n^{(i)}$, кореспондиращ на всяка стойност на главните нормални напрежения σ : $n^{(1)}$ за σ_1 ; $n^{(2)}$ за σ_2 и $n^{(3)}$ за σ_3 .
- Може да се докаже, че равнините съответстващи на главните нормали $n^{(1)}$, $n^{(2)}$, и $n^{(3)}$, са *ортогонални*.
- Трите корена на уравнението (2.12) σ_1 , σ_2 и σ_3 са реални числа, който факт е тясно свързан с физиката на задачата.
- Най-често главните нормални напрежения σ_1 , σ_2 и σ_3 са реални и различни числа (фиг. 2.5 (а)). Възможно е обаче две от тях да са равни (т.е. два от корените на кубичното уравнение да са равни), (фиг. 2.3 (б)), или даже и трите корена да са еднакви (фиг. 2.5 (в)).



Фигура 2.5 Графично представяне на напрегнатото състояние в точка, свързано с главните нормални напрежения: (а) трите главни напрежения са различни; (б) две от главните напрежения са равни; (с) трите напрежения

- Главните нормални напрежения σ_1 , σ_2 и σ_3 съвпадат с екстремните стойности на нормалните напрежения в точката и произволна площадка.
- Екстремните стойности на тангенциалните напрежения се намират в равнини, които са в ъглополовящите на равнините на главните нормални напрежения. Техните стойности са, както следва:

$$\tau_1 = |\sigma_1 - \sigma_3|/2, \quad \tau_2 = |\sigma_1 - \sigma_2|/2, \quad \tau_3 = |\sigma_2 - \sigma_3|/2$$

и се наричат главни тангенциални напрежения.

- В равнините на главните тангенциални напрежения нормалните напрежения са различни от нула и могат да се изчислят.
- Равнините, в които имаме само тангенциални напрежения, се наричат равнини на чисто срязване, където $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

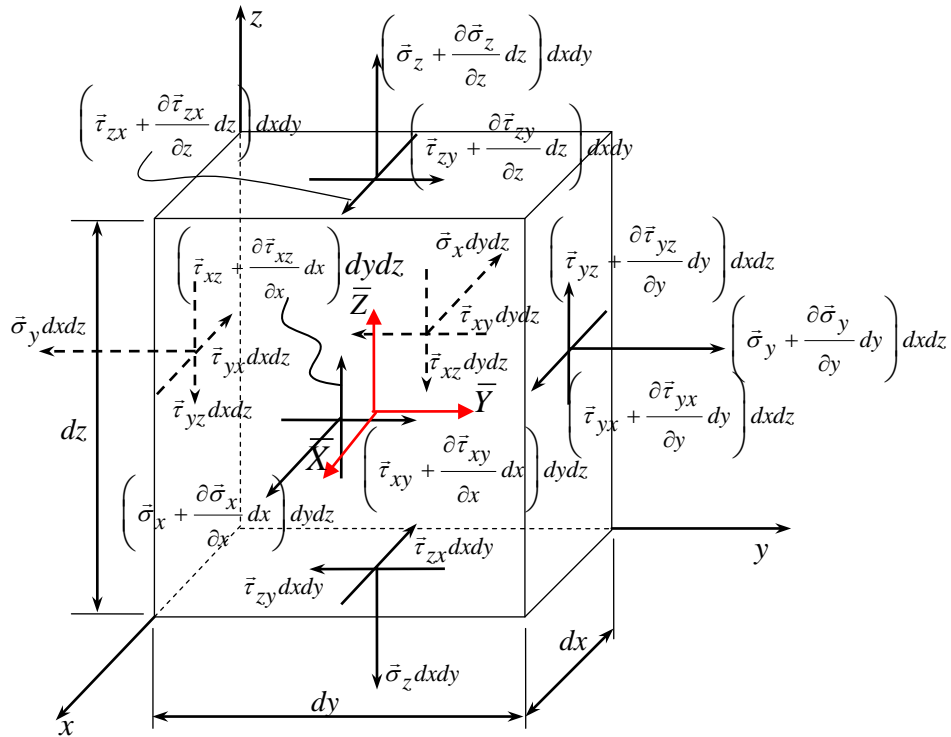
Д и ф е р е н ц и а л н и у р а в н е н и я з а р а в н о в е с и е

Ако едно тяло под действието на външни сили се намира в равновесие то тогава и всеки елементарен обем от него също се намира в равновесие. Ако се запишат условията за равновесие на елементарен обем на деформируемото тяло се получат условия за определяне на напреженията, действащи в тялото.

Това ще бъде илюстрирано върху диференциално малък елементарен обем от тялото с взаимноперпендикулярни страни, и действащите в него напрежения:

Важно е да се отбележи, че напреженията в площадките, лежащи в нулевите равнини, са приети за базови. В следствие на това приемане върху другите площадки напреженията получават нараствания, съответно по x , y , или z .

За този елементарен обем могат да се запишат три проекционни и три моментни уравнения за равновесие. Обемните сили са приети за константно разпределени по обема и техните компоненти ще ги отбележим с \bar{X} , \bar{Y} и \bar{Z} . (фиг. 2.6)



Фигура 2.6 Напряжения в дифференциално малък елемент.

Записва се проекционно условие за равновесие за ос x :

$$\begin{aligned} \sum X = 0: \quad & \bar{\sigma}_x dydz + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} dx dydz + \bar{\tau}_{yx} dx dz + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \\ & + \bar{\tau}_{yx} dx dy + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} dz dx dy - \bar{\sigma}_x dydz - \bar{\tau}_{yx} dx dz - \bar{\tau}_{yx} dx dy + \bar{X} = 0 \end{aligned}$$

и след съкращения се получава:

$$\sum X = 0: \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} + \bar{X} = 0. \quad (2.15)$$

Записва се проекционно условие за равновесие за ос y :

$$\begin{aligned} \sum Y = 0: \quad & \bar{\sigma}_y dx dz + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} dy dx dz + \bar{\tau}_{xy} dy dz + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \\ & + \bar{\tau}_{xy} dx dy + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} dz dx dy - \bar{\sigma}_y dx dz - \bar{\tau}_{xy} dy dz - \bar{\tau}_{xy} dx dy + \bar{Y} = 0 \end{aligned}$$

След съкращения се получава:

$$\sum Y = 0: \quad \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} + \bar{Y} = 0. \quad (2.16)$$

Записва се проекционно условие за равновесие за ос z:

$$\begin{aligned} \sum Z = 0: \quad & \bar{\sigma}_z dx dy + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} dz dx dy + \bar{\tau}_{xz} dy dz + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} dx dy dz + \\ & + \bar{\tau}_{yz} dx dz + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} dy dx dz - \bar{\sigma}_z dx dy - \bar{\tau}_{xz} dy dz - \bar{\tau}_{yz} dx dz + \bar{Z} = 0 \end{aligned}$$

и след съкращения се получава:

$$\sum Z = 0: \quad \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \bar{Y} = 0. \quad (2.17)$$

От моментовите равновесни условия

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0 \quad \text{и} \quad \sum Z = 0,$$

се получават следните изрази (2.18):

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx}; \quad \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{zx}; \quad \bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zy}. \quad (2.18)$$

Този резултат е добре известен като теорема за взаимност на тангенциалните напрежения.

Така окончателно уравненията на статиката дават следните три уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} + \bar{Y} &= 0. \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \bar{Z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Изразите (2.19) дават връзка между нарастванията на напреженията и обемните сили в диференциално малък обем от вътрешността на тялото и представляват условия за равновесие на този обем.

Условията за равновесие могат да се запишат в компактна форма по следния начин:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

или

$$[\partial]\{\sigma\} + \{\bar{p}\} = 0 \quad (2.21)$$

където

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

представлява матрица диференциален оператор,

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\}^T; \quad \{\bar{p}\} = \{\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{Z}\}^T \quad (2.23)$$

са съответно векторите на напреженията и обемните сили.

Условията на повърхността (2.6) могат да се запишат във вида:

$$\begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}; \quad (2.24)$$

или

$$[c]\{\sigma\} - \{p_n\} = 0 \quad (2.25)$$

където

$$[c] = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix}; \quad \{p\} = \{X_p \quad Y_p \quad Z_p\}^T, \quad (2.26)$$

са съответно матрица на посочените косинуси и вектор на компонентите на външното натоварване.

Тези условия са допълнителни – гранични условия и не дават принос към броя на уравненията необходими за определяне на неизвестните. Като се вземе под внимание теоремата за взаимност на тангенциалните напрежения (2.18) неизвестните напрежения стават 6 броя, докато броят на уравненията за тяхното определяне, който до този момент са изведени е 3, а именно уравненията за равновесие (2.19). Условията на повърхността са допълнителни условия. Задачата е статически неопределима. По аналогия със строителната статика това са условията за съвместимост на деформациите. В тримерния случай се разглежда деформираното състояние на безкрайно малка област около произволна точка на непрекъснатата среда или наричана – *геометрична теория на деформациите*.

ГЛАВА 3

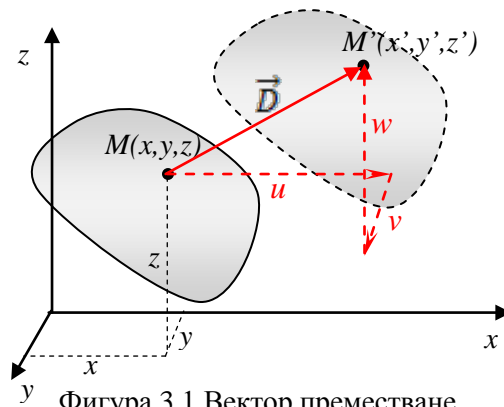
ГЕОМЕТРИЧНА ТЕОРИЯ НА ДЕФОРМАЦИИТЕ

Когато едно деформируемо тяло се премества в пространството без изменение на разстоянието между точките в тялото се казва, че то се движи (премества) като идеално твърдо тяло без деформация. Ако преместването е придружено с изменение на разстоянията между точките на тялото, то в този случай се разглежда преместване, съчетано с деформация. Ако се приеме, че в областта, заемана от тялото, е дадена функцията на преместванията на точките, тогава може да се определи деформацията на тялото. Според предпоставката за непрекъснатата структура, функциите на преместванията и деформациите са непрекъснати, гладки и диференцируеми, което спомага определянето им. Дефинирането на преместванията и деформациите се осъществява по чисто геометричен път.

Изменение на дължината на отсечка – линейна деформация

Ако се разгледа едно деформируемо тяло преди и след деформацията може да се дефинира векторпреместване по следния начин:

Нека точка M е с координати x, y, z преди деформацията (фиг. 3.1), а след деформацията тя се премества в положение x', y', z' . Векторът \vec{D} свързващ старото с новото положение на точката се нарича векторпреместване. Той има проекции съответно u, v, w върху трите координатни оси.

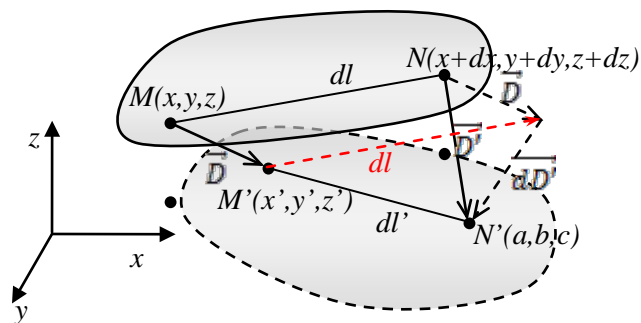


Фигура 3.1 Вектор преместване.

В линейна постановка тези проекции зависят линейно от координатите на точката, т.е. точките, разположени на една права преди деформацията лежат на една права и след деформацията.

Ако се вземат две точки от едно тяло и се разгледа взаимно им разположение преди и след деформацията ще се получат зависимости за изменението на разстоянието между тях.

Нека разгледаме точките $M(x, y, z)$ и $N(x+dx, y+dy, z+dz)$, които след деформацията са заели положения $M'(x', y', z')$ и $N'(a, b, c)$ - фиг. 3.2:



Фигура 3.2 Положение на точките след деформацията.

Разстоянието между двете точки преди деформацията е dl и има проекции dx, dy, dz :

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} . \quad (3.1)$$

Векторите на преместванията са:

$$\vec{D} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k} \quad (3.2)$$

$$\vec{D} = \vec{D}' + d\vec{D}' \quad (3.3)$$

където

$$d\vec{D}' = du.\vec{i} + dv.\vec{j} + dw.\vec{k}, \quad (3.4)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ са единичните вектори на координатните оси x, y, z . Следователно:

$$\vec{D}' = (u + du).\vec{i} + (v + dv).\vec{j} + (w + dw).\vec{k}, \quad (3.5)$$

Координатите на точките M и N след деформацията, т. е. координатите на точките M' и N' се получават следните изрази:

$$\begin{aligned} M'(x', y', z'), \\ x' = x + u; \quad y' = y + v; \quad z' = z + w, \\ N'(a, b, c), \\ a = x + dx + u + du \\ b = y + dy + v + dv \\ c = z + dz + w + dw \end{aligned} \quad (3.6)$$

Разстоянието между точките M и N след деформацията, може да се определи като сума на векторите $d\vec{l}$ и $d\vec{D}'$ както следва:

$$d\vec{l}' = d\vec{l} + d\vec{D}'$$

или след като се вземе предвид (3.6):

$$d\vec{l}' = (dx + du)\vec{i} + (dy + dv)\vec{j} + (dz + dw)\vec{k}. \quad (3.7)$$

След известни преобразувания и пренебрегване на малките събираеми от по-висок порядък дължината на вектора dl след деформацията се получава:

$$dl' = dl \left\{ 1 + \left[\frac{\partial u}{\partial x} l^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) lm + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ln + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) mn \right] \right\}. \quad (3.8)$$

Повече информация може да бъде намерена в [1] и [2].

Относителното изменение на разстоянието между точките M и N преди и след деформацията на тялото е следното:

$$\varepsilon_{MN} = \frac{dl' + dl}{dl}, \quad (3.9)$$

или:

$$\varepsilon_{MN} = \frac{\partial u}{\partial x} l^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) lm + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ln + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) mn \quad (3.10)$$

ε_{MN} , се нарича линейна деформация на безкрайно малка област около точка

$M(x, y, z)$ на непрекъснатата среда по посока \vec{D} .

Ако разгледаме права призма, на която трите ръба са успоредни на трите координатни оси, то изменението на дължините на ръбовете ѝ след деформацията се получават, ако последователно в израза (3.9) заместим $l=1, m=0, n=0$; $l=0, m=1, n=0$; $l=0, m=0, n=1$; Така се получават изрази за линейните деформации по три взаимноперпендикулярни площадки:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.11)$$

Линейните деформации се приемат за положителни, когато представляват относителни удължения, и са отрицателни, когато представляват относителни скъсявания.

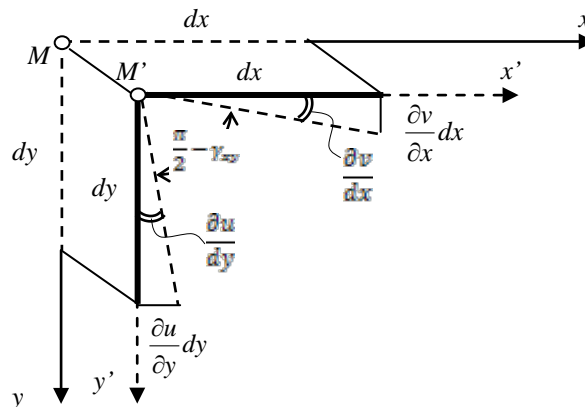
Изменение на правия ъгъл – ъглова деформация

Геометричната същност на изразите в скобите в уравнение (3.10) за линейната деформация се установява просто и нагледно, ако се приеме координатна система с начало в точка $M'(x, y, z)$ и оси $M'x', M'y', M'z'$, успоредни на осите Ox, Oy, Oz . Ако се погледне тази координатна система от страната на оста $M'z'$ – фиг. 3.3 и се разгледат проекциите на отсечката dl преди и след

деформацията ще се получи, че отсечката dx се завърта на ъгъл $\frac{\partial v}{\partial x}$, отсечката dy на

ъгъл $\frac{\partial u}{\partial y}$. Първоначално правият ъгъл между координатните оси $M'x'$ и $M'y'$ ще се

намали с ъгъла: $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$.



Фигура 3.3 Ъглова деформация.

По аналогичен начин се получава и изменението на правия ъгъл и в другите равнини:

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Величините γ_{xyz} ; γ_{yxz} ; γ_{zxy} се наричат ъглови деформации и изразяват изменението на правия ъгъл между безкрайно малките отсечки dx , dy , dz , които имат общо начало в точка $M(x,y,z)$.

Ъгловите деформации са положителни когато изразяват намаляване на правия ъгъл.

Сега израза (3.10) за относителното изменение на отсечката dl може да се запише във вида:

$$\varepsilon_{MN} = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} ln + \gamma_{xz} mn \quad (3.13)$$

където:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

От начина на дефиниране се вижда, че:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}.\quad (3.15)$$

Зависимости (3.14) са известни под названието *диференциални уравнения на Коши* в геометричната теория на деформациите. Те дават връзка между деформациите и преместванията. В по-кратка форма могат да се запишат във вида:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

или:

$$[\partial]^T \{s\} - \{\varepsilon\} = 0, \quad (3.17)$$

където:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\{s\}^T = \{u \quad v \quad w\}^T \quad (3.19)$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}^T \quad (3.20)$$

Условия за непрекъснатост на деформациите. Тъждества на Сен-Венан

От изразите, даващи връзка между преместванията и деформациите, се вижда, че е възможно, ако са известни функциите на преместванията на едно тяло, лесно и еднозначно да се определят деформациите.

От математическия анализ е известно, че при зависимост от вида (3.14), ако са известни деформациите, не винаги е възможно да се определят еднозначно преместванията. Тази задача е решима само в случаите, в които дадените деформации удовлетворяват необходимите и достатъчни условия за интегрируемост на уравненията на Коши. Тези условия се получават като се изключи преместването от уравнения (3.14). След известни преобразувания се получават следните условия за необходимост и достатъчност за интегрируемост:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Тези условия представляват условия за непрекъснатост на деформациите и се наричат тъждества на Сен-Венан.

ГЛАВА 4

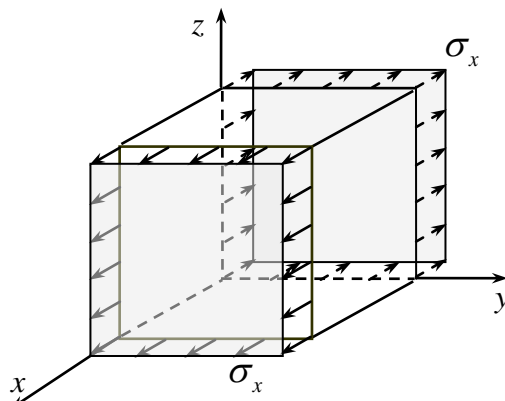
ЛИНЕЙНА ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА

Напрегнатото и деформираното състояние на деформируемо тяло, намиращо се в равновесие под действието на дадено натоварване, са две съставни части на едно и също явление. Опитът показва, че те се намират в еднозначна функционална връзка. Тази връзка се определя по експериментален път, тъй като тя зависи от физическите свойства на деформируемото тяло. В теорията тази връзка може да се приеме по различни начини. Ако се приеме за линейна, то имаме линейна теория на еластичността и това е случаят, който ще разгледаме тук. Ако се приеме, че присъстват пластични деформации, то преминаваме към елементи от теория на пластичността.

З а в и с и м о с т м е ж д у н а п р е ж е н и я и д е ф о р м а ц и и в л и н е й н а т а т е о р и я н а е л а с т и ч н о с т т а

В линейната теория на еластичността се изучават само идеално еластични тела, при които връзката между напреженията и деформациите е линейна и се дава от обобщения закон на Хук. Чрез този закон телата се описват физическите характеристики на материала. Теорията на непрекъснатите среди се превръща в теория на еластичността.

За по-нагледна илюстрация на закона на Хук ще бъде разгледано първоначално едномерно напрегнато състояние отделно по три взаимно перпендикулярни направления. По-различен извод на закона на Хук е направен в [1]. Нека един елементарен обем е натоварен с константни напрежения по направление на ос x , както е показано на фиг. 4.1:

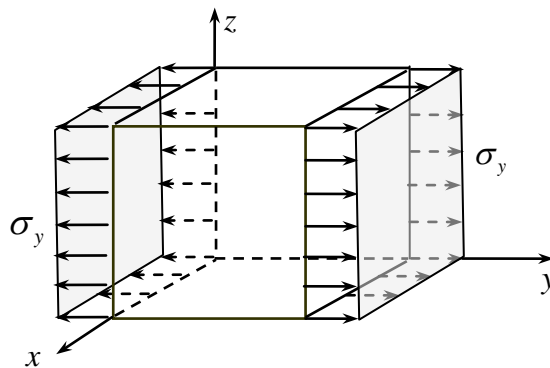


Фигура 4.1 Елементарен обем натоварен по ос x .

Това състояние отговаря на едноосово напрегнато състояние и за него може да се запишат изразите за деформациите (известни от съпротивление на материалите) съгласно закона на Хук:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x\end{aligned}\quad (4.1)$$

Нека сега същият елементарен обем е натоварен с константни напрежения по направление на ос y , показано на фиг. 4.2:

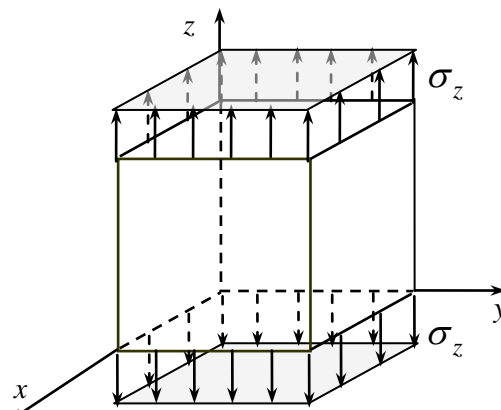


Фигура 4.2 Елементарен обем натоварен по ос y .

Това състояние отговаря на едноосово напрегнато състояние по ос y . Изразите (4.1) за деформациите съгласно закона на Хук за този случай са:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_x &= -\frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \sigma_y\end{aligned}\quad (4.2)$$

Нека сега елементарният обем е натоварен с константни напрежения по направление на ос z , показано на фиг. 4.3:

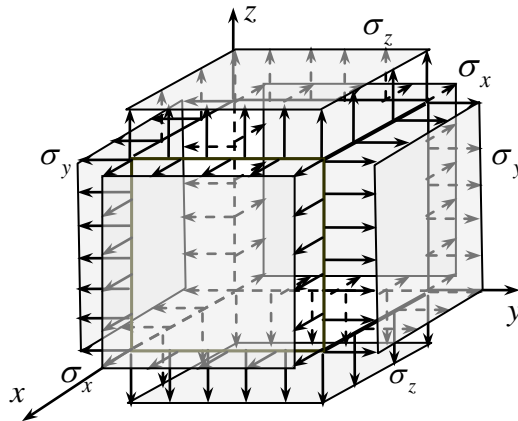


Фигура 4.3 Елементарен обем натоварен по ос z .

Отново напрегнатото състояние е едноосово, но по ос z . Изразите за деформациите съгласно закона на Хук (4.3) за този случай са:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \sigma_z \\ \varepsilon_x &= -\nu \sigma_z \\ \varepsilon_y &= -\nu \sigma_z\end{aligned}\quad (4.3)$$

Нека се разгледа елементарният обем натоварен по трите оси (фиг. 4.4) с равномерни напрежения. Поради валидността на принципа на суперпозицията, може да се запишат изразите:

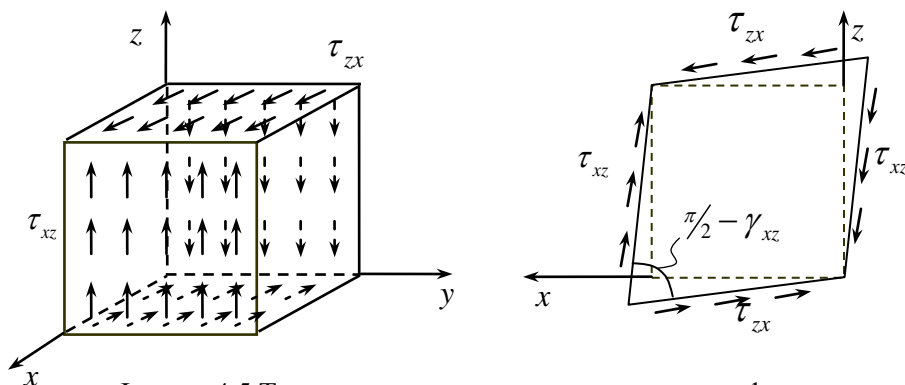


Фигура 4.4 Тримерно натоварен елемент.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]\end{aligned}\quad (4.4)$$

Тези изрази дават връзката между нормалните напрежения и осовите деформации при тримерно напрегнато състояние. Както се вижда в тези изрази никъде не участва ъглова деформация или тангенциално напрежение. Това е така, тъй като те са независими от нормалните напрежения и осовите деформации.

За да се получат изразите за ъгловите деформации трябва да се разгледа елементарен обем, но натоварен с тангенциални напрежения. Такова натоварване в с напрежения τ_{xz} и τ_{zx} в равнината xOz е показано на фиг. 4.5. В резултат от натоварването със сръзващи напрежения се получава изменение на правия ъгъл на елементарния обем в същата равнина. Важно е да се отбележи, че при това въздействие не се пораждат осови деформации.



Фигура 4.5 Тангенциални напрежения и ъглови деформации.

Изменението на правия ъгъл се определя с ъгловата деформация γ_{xz} , като връзката между напреженията и деформациите е линейна за линейно-еластичен материал.

Коефициентът на пропорционалност е материална константа за линейно-еластичен, хомогенен, еднороден и изотропен материал. Нарича се коефициент на ъгловите деформации и се бележи с G . Така връзката тангенциални напрежения-ъглови деформации е:

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}. \quad (4.5)$$

Аналогично, ако се натовари елементарният обем с тангенциални напрежения в равнините xOy и yOz ще се получи връзката между останалите тангенциални напрежения и ъгловите деформации както следва:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}. \quad (4.6)$$

Представеното до тук е нагледен извод на закона на Хук за линейно-еластичен, хомогенен, еднороден и изотропен материал.

В най-общ вид за произволен материал закона на Хук се записва във вида:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (4.7)$$

където $\{\sigma\}$ е вектор на напреженията, $\{\varepsilon\}$ е вектор на деформациите, а $[D]$ е матрица на физическите характеристики с размери 6×6 . Компонентите на тази матрица се определят експериментално и се наричат модули. В най-общия случай броят на тези модули е 36. Тъй като определянето на такъв брой модули за даден материал е изключително трудно или невъзможно за целите на практиката и за опростяване на математическия апарат се приемат различни предпоставки и опростявания, коментирани в глава 1. За идеално еластично изотропно и еднородно тяло е доказано, че броят на модулите се свежда до 2. Тези две физически характеристики са добре известните *модул на линейната деформация* E с измерение N/m^2 и *коефициент на Поасон* ν , който е бездименсионна величина.

Модулът на ъгловите деформации G е свързан с другите две константи, т.е. не е трета, допълнителна константа. Връзката между константите има вида:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.8)$$

Обобщения закон на Хук за такова тяло може да се запише по следния начин:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.9)$$

или в матричен вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

или

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}. \quad (4.11)$$

От (4.11) следва обратната зависимост:

$$\{\sigma\} = [C]^{-1}\{\varepsilon\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (4.12)$$

или:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x - \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]; & \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y - \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right]; & \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z - \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right]; & \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}; \end{aligned} \quad (4.13)$$

Всички задачи на теория на еластичността се свеждат до съвместно решаване на уравненията на статиката (диференциалните уравнения за равновесие), уравненията на геометрията (диференциалните уравнения на Коши), уравненията на физиката (обобщения закон на Хук), като са изпълнени допълнително

тждествата на Сен-Венан (условията за съвместимост на деформациите) и условията на повърхността като гранични условия. Тези уравнения образуват обща система от 15 уравнения с 15 неизвестни (6 напрежения, 6 деформации, 3 премествания). За тази система е доказано, че има единствено решение (според теоремата на Кирхоф).

Теорема на Кирхоф: *Ако твърдо деформируемо и идеално еластично тяло се намира в естествено напрегнато състояние, и ако принципът на суперпозицията е в сила, решението, което удовлетворява общата система уравнения, граничните и началните условия, е единствено.*

Такова решение при най-общи гранични условия не е намерено, но има редица частни случаи, за които това е направено. Общите случаи и по сложните частни случаи, за които не са намерени точни решения, могат да се решават с така наречените дискретизационни методи. Именно тези точни и приближени решения са предмет на курса по теория на еластичността.

Принципът на суперпозицията е в сила, защото всички уравнения от общата система са линейни.

С х е м и з а р е ш е н и е н а п р о с т р а н с т в е н а т а з а д а ч а

Според реда на определяне на неизвестните се разграничават три основни схеми за решаване на пространствената задача на теория на еластичността, а именно: прав, обратен и полуобратен метод.

В настоящия курс за примерния случай тези методи ще бъдат само общо описани, а в конкретните частни случаи ще бъдат по-подробно обяснени.

Прав метод за решение на пространствената задача:

Дадено е тяло с определени физически, геометрични характеристики, външен товар и опорни връзки. Конкретното напрегнато и деформирано състояние се определя чрез пряко интегриране на общата система от 15 уравнения като се отчитат конкретните гранични условия и условията за съвместимост на деформациите.

При този метод се различават два подхода:

Непосредствено определяне на напреженията:

От общата система от 15 уравнения се изключват деформациите и преместванията. В резултат се получава система от 6 диференциални уравнения с 6 неизвестни – компонентите на тензора напрежение. Тази система се решава съвместно с условията на повърхността (служещи за определяне на интеграционните константи) от където се определят напреженията. В следствие от закона на Хук се определят деформациите, които се подчиняват на условията за съвместимост на деформациите на Сен-Венан и накрая от уравненията на Коши се определят преместванията. Този подход съответства на силовия метод в статиката на статически неопределимите системи.

Непосредствено определяне на преместванията:

От общата система от 15 уравнения се изключват деформациите и напреженията. В резултат се получава система от 3 диференциални уравнения с 3 неизвестни – преместванията по трите оси u , v и w , които могат да бъдат определени. От уравненията на Коши се определят деформациите, които

автоматично удовлетворяват условията на Сен-Венан. В следствие от закона на Хук се определят напреженията и се подчиняват на условията на повърхността. Този подход съответства на деформационния метод в статиката на кинематически неопределимите системи.

Обратен метод за решение на пространствената задача:

В този случай се задава една от основните групи величини и се определя всичко останало, включително и външния товар, който е причинил това състояние. Например, ако са зададени преместванията като непрекъснати и диференцируеми функции, могат да се определят деформациите и след това напреженията. Накрая се определя и външния товар от условията на повърхността.

Обратния метод не може да се счита за общ подход за решение, но по този път са получени редица решения на важни за практиката инженерни задачи.

Полуобратен метод за решение на пространствената задача:

При този подход се ползват вече известни решения на конкретни задачи като на тази база се предвижда вида на функциите на група от неизвестните за дадената задача. Например приема се вида на функцията на преместванията (или напреженията) и от известните зависимости се определят останалите неизвестни. Тук затруднението е в удовлетворяването на допълнителните условия (условията на Сен-Венан и тези на повърхността).

Полуобратния метод не може да се счита за общ подход за решение, но по този път са получени редица решения на важни за практиката инженерни задачи.

Повече информация може да бъде намерена в [1] и [2].

ГЛАВА 5

РАВНИННА ЗАДАЧА НА ТЕОРИЯ НА ЕЛЕСТИЧНОСТТА

Известно е от практиката, че съществуват конструктивни елементи със специфични геометрия и натоварвания, които се описват по един и същи начин във всички равнини, успоредни на някоя предварително дадена равнина. В чист вид равнинно състояние е много трудно да се осъществи. Равнинните състояния са сравнително прости от математическа гледна точка и са разработени по-пълно. В теория на еластичността са известни две равнинни задачи, които имат голямо значение в инженерната практика. Това са равнинно деформирано състояние (РДС) и равнинно напрегнато състояние (РНС).

Р а в н и н н о д е ф о р м и р а н о с ъ с т о я н и е

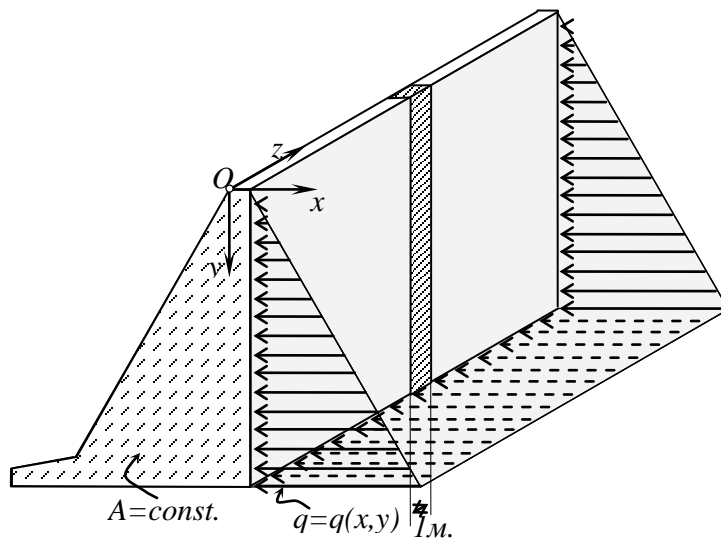
Когато пълните премествания на всички точки на едно изотропно тяло са успоредни на една равнина и са функции само на две независими променливи, то се говори за равнинно деформирано състояние (РДС).

Типичен пример за това е дълга подпорна стена, която представлява дълго призматично тяло, натоварено с товар, успореден на напречното ѝ сечение и постоянен по направление на образуващата.

Други примери за такава инженерна задача са вкопан тръбопровод, тунел в еднородна среда, стените на голям басейн и т.н.

Всички напречни сечения достатъчно отдалечени от краищата на стената се намират при еднакви условия. Техните точки се преместват като остават в първоначалната си равнина. За да се определи напрегнатото и деформирано състояние в една такава задача е достатъчно да се изследва един сегмент с дължина единица – (фиг. 5.1).

Уравненията на РДС се получават от общата система от 15 уравнения като се приравняват на нула част от неизвестните.



Фигура 5.1 Равнинно деформирано състояние.

За да се намали броя на уравненията и на неизвестните се правят следните приемания:

- ✓ Координатната система Oxy съвпада с произволно напречно сечение на дългото призматично тяло, а оста Oz е насочено по образуващата;
- ✓ Призматичното тяло не променя сечението си по дължина, т.е. $A=const.$;
- ✓ Натоварването е константно по дължина на тялото, т.е. $q=q(x,y)$;
- ✓ При тези условия имаме равнинна деформация и при тази координатна система се приема $w=0$, а другите две премествания са функции само на x и y , т.е. $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$.

Така уравненията на Коши приемат вида:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= 0 \\
 \varepsilon_z &= 0, & \gamma_{xz} &= 0
 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Имайки пред вид изразите (5.1) за деформациите, лесно се вижда, че условията за непрекъснатост на деформациите се удовлетворяват тъждествено. Изключение прави само първото от тях, което остава като допълнително условие за интегрируемост на уравненията на Коши. Така тъждествата на Сен-Венан за РДС имат вида:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.2)$$

От закона на Хук се получава:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \quad (5.3)$$

или:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (5.4)$$

Така обобщеният закон на Хук добива вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= 0; & \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Като се вземе пред вид израза получен за σ_z окончателно уравненията на физиката са:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y); & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x); \end{aligned} \quad (5.6)$$

Обратната зависимост е:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_x + \nu_1 \varepsilon_y); & \tau_{xy} &= \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x); \end{aligned} \quad (5.7)$$

и като напрежението σ_z е зависимо неизвестно:

$$\sigma_z = 2 \frac{E_1}{1-\nu_1} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad (5.8)$$

където

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{и} \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (5.9)$$

Горните изрази показват, че в задачата за РДС само три от напреженията и три от деформациите са независими.

В матричен вид закона на физиката се записва по следния начин:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_1} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_1 & 0 \\ -\nu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad \{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}; \quad (5.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_1 & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (5.11)$$

Матриците $[C]$ и $[D]$ са матрици на еластичността.

Диференциалните уравнения за равновесие за равнинно деформирано състояние имат вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} &= 0. \\ \bar{Z} &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

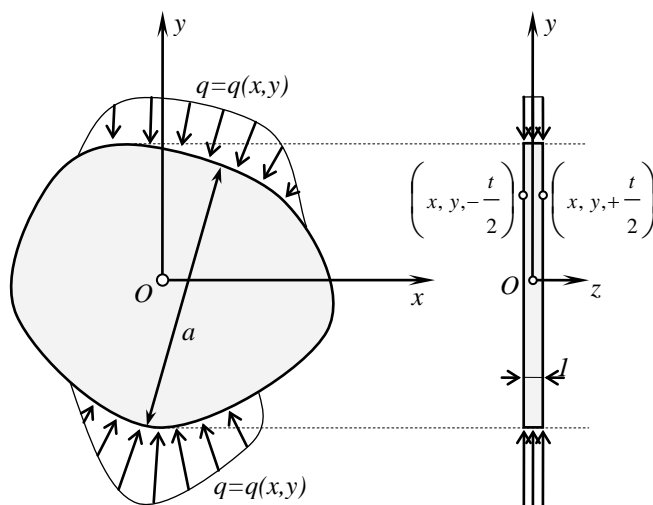
Условията на повърхността са:

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ Y_n &= \tau_{xy} l + \sigma_y m. \\ Z_n &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Така задачата за равнинно деформирано състояние има 8 независими неизвестни (3 напрежения, 3 деформации и 2 премествания) и 8 уравнения (диференциални уравнения за равновесие -2бр., уравнения на геометрията -3бр., уравнения на физиката 3бр.), от които да се определят.

Равнинно напрегнато състояние

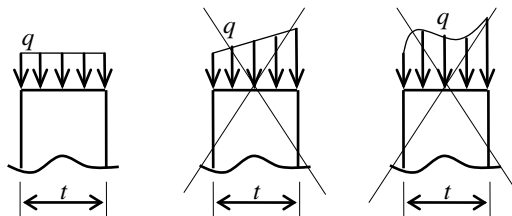
В равнинно напрегнато състояние (РНС) се намират тела, които се наричат дискове. Дискът (гредостена) е цилиндрично или призматично тяло, основата на което е с много по-големи размери в сравнение с височината му. Височината на това тяло ще наричаме дебелина. Равнината, която я разполовява ще наричаме средна равнина. Основен пример за диск в практиката е носеща стена (шайба) от конструкцията на сграда – фиг. 5.2. Както е известно такива конструктивни елементи присъстват във всички сгради, поради тази причина теоретичната задача за равнинно напрегнато състояние е от голяма важност за инженерната практика.



Фигура: 5.2 Равнинно напрегнато състояние.

За да се намали броя на уравненията и на неизвестните се правят следните приемания:

- ✓ Координатната система Oxy се поставя в средната равнина на диска, като оста Oz е насочена перпендикулярно на основата на диска;
- ✓ Размерът a на диска е много пъти по-голям от дебелината му, т.е. $t \ll a$;
- ✓ Предполагаме, че дискът се намира в устойчиво равновесие;
- ✓ Външния товар е разположен само върху околната повърхнина на диска и има константна стойност по дебелината, т.е. $q=q(x,y)$ – фиг. 5.1.



Фигура 5.1 Външен товар: $q(x,y)$.

- ✓ Поради вида на натоварването напреженията върху стените на диска са нулеви, или:

$$\sigma_z\left(x, y, \pm \frac{t}{2}\right) = 0; \quad \tau_{zx}\left(x, y, \pm \frac{t}{2}\right) = 0; \quad \tau_{zy}\left(x, y, \pm \frac{t}{2}\right) = 0. \quad (5.14)$$

- ✓ Поради малката дебелина на диска няма да бъде вкарана голяма грешка, ако се приеме, че тези напрежения са равни на нула и за всички останали точки по дебелина на диска се получава:

$$\sigma_z(x, y, z) \approx 0; \quad \tau_{zx}(x, y, z) \approx 0; \quad \tau_{zy}(x, y, z) \approx 0. \quad (5.15)$$

- ✓ Всички функции, описващи напреженията, са функции само на координатите x и y :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= f_1(x, y); & \tau_{xy} &= f_3(x, y) \\ \sigma_y &= f_2(x, y); & \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_z &= 0; & \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

В следствие на тези опростявания обобщеният закон на Хук приема вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); & \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y); & \gamma_{xz} &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

или в матрична форма:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad \{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \dots \quad (5.18)$$

Обратната връзка е:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (5.19)$$

При равнино напрегнатото състояние зависима неизвестна се получава деформацията ε_z , която може да се изрази и по следния начин:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (5.20)$$

Законът на Хук при равнино напрегнатото състояние се отличава от същия при равнинно деформирано състояние по това, че в РНС участват естествените E и ν , докато в РДС участват редуцираните им стойности E_I и ν_I . Именно тази прилика в уравненията на закона на Хук е причина в РДС да се въведат тези редуцирани величини.

Уравненията на геометрията (уравненията на Коши) са:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= 0, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \gamma_{xz} &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Условието за непрекъснатост на деформациите (условието на Сен-Венан) има вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

От последните три уравнения, след интегриране се получава, че деформацията ε_z трябва да бъде линейна функция на координатите x и y . На практика обаче това изискване не се спазва и се удовлетворява само първото от твърденията на Сен-Венан. Това опростяване не води до съществени грешки, а ползата от него е, че условията за непрекъснатост на деформациите стават същите както и в задачата за равнинно деформирано състояние.

Диференциалните уравнения за равновесие за равнинно напрегнатото състояние имат вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} &= 0 \\ \bar{Z} &= 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Условията на повърхността са:

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ Y_n &= \tau_{xy} l + \sigma_x m \\ Z_n &= 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Така задачата за равнинно напрегнатото състояние има 8 независими неизвестни (3 напрежения, 3 деформации и 2 премествания) и 8 уравнения (диференциални уравнения за равновесие -2бр., уравнения на геометрията -3бр., уравнения на физиката 3бр.), от които да се определят.

Общи схеми за решение на равнинната задача

В тримерната задача беше споменато, че съществуват прав, обратен и полуобратен методи за решаването ѝ. Тук по-подробно ще бъде описан първоначално правият метод за решаване на равнинната задача. Както се вижда от горните изрази, при равнинно деформирано състояние и при равнинно напрегнатото състояние диференциалните уравнения за равновесие, условията на повърхността, уравненията на геометрията и тъждествата на Сен-Венан съвпадат. Само уравненията на физиката се отличават, и то не по структура, а по съдържание, като в РДС се въвеждат редуцирани стойности на модула на еластичност и на коефициента на Поасон. По тази причина за двете задачи може да се разработи един и същи математически апарат за решаването им.

✓ *Прав метод чрез непосредствено определяне на преместванията:*

При правия метод за решаване може да се подходи от общата система уравнения като се изключат напреженията и деформациите и първо се определят преместванията.

Ако се заместят уравненията на геометрията в уравненията за равновесие и полученото в обобщения закон на Хук, се получават две уравнения съдържащи само двете неизвестни премествания:

$$\begin{aligned} G \left(\nabla^2 u + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{\partial x} \right) + \bar{X} &= 0 \\ G \left(\nabla^2 v + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{\partial y} \right) + \bar{Y} &= 0 \end{aligned}, \quad (5.25)$$

където:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (5.26)$$

се нарича диференциален оператор на Лаплас.

Изводът на изрази (5.25) е описан по-подробно в [1] и [2].

Уравнения (5.25) са еднакви за РНС и РДС. Наричат се уравнения на Ламе. В тях се синтезират всички зависимости на равнинната задача. Те съдържат само две неизвестни – преместванията $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$. След определянето на преместванията от уравненията на Ламе могат да се определят деформациите (от уравненията на Коши) и напреженията (от закона на Хук). Решението на равнинната задача, получено по този начин е единствено, ако са удовлетворени граничните условия (условията на повърхността).

✓ *Прав метод чрез непосредствено определяне на напреженията:*

Ако бъдат разгледани наличните уравнения за решаването на равнинната задача се вижда, че в уравненията за равновесие участват само напрежения. Тези уравнения обаче са само две, а неизвестните напрежения са три. Като допълнително уравнение може да се използва тъждеството на Сен-Венан, ако се представи само чрез напрежения. По този начин след окончателното намиране на всички неизвестни няма да е необходимо допълнително да се проверяват условията за съвместимост на деформациите, защото тяхното отъждествяване е предварително осъществено. Това е извършено от Морис Леви който е използвал връзката между деформациите и напреженията и е заместил деформациите в уравнението на Сен-Венан. Така удобно се представя само чрез напрежения и след преработка добива следния вид :

$$\frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = -(1 + \nu_1) \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} \right). \quad (5.27)$$

При константни обемни сили, т.е. $\bar{X} = const.$ и $\bar{Y} = const.$ горният израз приема вида:

$$\frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0, \quad (5.28)$$

или

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (5.29)$$

където

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5.30)$$

е операторът на Лаплас.

Условието за непрекъснатост на деформациите, записано в този вид се нарича уравнение на Морис Леви. За непосредственото определяне на напреженията служат следните уравнения:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} = 0$$

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5.32)$$

И като допълнителни условия за определяне на интеграционните константи се явяват условията на повърхността:

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ Y_n &= \tau_{xy} l + \sigma_x m \end{aligned} \quad (5.33)$$

Тези уравнения са достатъчни за еднозначно решение на задачата.

Забележителното е, че тези условия не съдържат никакви физически характеристики на материала. Напрегнатото състояние на два геометрически еднакви дискове с еднакво натоварване и подпирание, изградени от различни, но еднородни и изотропни материали (стъкло, стомана и др.), е едно и също. Това важно обстоятелство е забелязано за първи път от Морис Леви и носи наименованието *теорема на Морис Леви*.

След определяне на напреженията лесно могат да се изчислят деформациите от обобщения закон на Хук, а след това и преместванията от уравненията на Коши.

ГЛАВА 6

МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА РАВНИННАТА ЗАДАЧА НА ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА

Независимо от общата схема на решение, дали първоначално ще бъдат определени преместванията или напреженията се достига до система от диференциални уравнения. В зависимост от подхода, с който се атакуват тези уравнения най-общо може да се разграничат аналитичен и дискретен метод за решаване на равнинната задача. И в двата случая решението на задачата е приблизително, тъй като само в много частни случаи съществува точно аналитично решение на групите диференциални уравнения. При аналитичните методи съществува опростяване на задачата, използвайки чисто математически апарат и свеждайки системата от диференциални уравнения до друга, по-проста група от уравнения. В последствие чрез разлагането на функцията на натоварването и функцията на напреженията в ред се достига до решение на задачата. В този случай тялото, за което търсим решение, се разглежда като непрекъснато и еднородно. Предимството на тези методи е, че имат висока точност на решението на задачата

поради аналитичния им характер. Недостатък е ограничеността на задачите, които могат да бъдат решени чрез тях.

При дискретните методи основната разлика от аналитичните е, че тялото предварително мислено се разделя на зони с краен размер. В този случай функциите на преместванията, напреженията и деформациите се считат за непрекъснати и диференцируеми само в границите на въпросните зони. Всички, изведени до тук зависимости са валидни в тези граници. Предимството на тези методи е, че след известни преобразувания се достига до решение на система линейни, а не диференциални уравнения. Недостатък е по-ниската точност, която зависи донякъде от размера на избраните крайни зони.

На кратко ще бъдат описани някои от по-популярните методи, както аналитични така и дискретни. Подробно тези методи са описани в [1] и [2].

Общи схеми за решаване на равнинната задача. Функция на напреженията

В предходната глава беше споменато при РДС и при РНС диференциалните уравнения за равновесие, условията на повърхността, уравненията на геометрията и уравнението на Морис Леви съвпадат. Уравненията на физиката се отличават и то не по структура, а по съдържание, като в РДС се въвеждат редуцирани стойности на модула на еластичност и коефициента на Поасон. За по-голяма прегледност уравненията на равновесие, уравнението на Морис Леви и условията на повърхността ще бъдат записани отново:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} &= 0 \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \\ X_n &= \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ Y_n &= \tau_{xy} l + \sigma_x m \end{aligned} \quad (6.1)$$

От тези уравнения се вижда, че те са достатъчни за еднозначното определяне на напреженията било то в задачата за РДС, било то в задачата за РНС. Това съответства на решение на равнинната задача по правия метод – чрез непосредствено определяне на напреженията.

Уравненията за равновесие, написани по-горе, ще бъдат удовлетворени тъждествено, ако приемем, че напреженията могат да се изразят по следния начин (при постоянни обемни сили):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \bar{X}x, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \bar{Y}y, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},\end{aligned}\tag{6.2}$$

където функцията φ за момента е неизвестна функция. Единственото условие, на което трябва да отговаря въведената функция $\varphi(x,y)$ е тя да е непрекъсната и диференцируема функция, притежаваща производни от втори ред. Тази функция е въведена от Ери и по тази причина е наречена *функция на Ери* или *функция на напреженията*. За да може напреженията, намерени по този начин, да съответстват на реални за задачата деформации е необходимо и достатъчно да бъде удовлетворено уравнението на Морис Леви. Като се замести в него израза за напреженията при константни обемни сили се получава следният резултат:

$$\nabla^4 \varphi = 0 \text{ или } \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0,\tag{6.3}$$

тъй като: $\nabla^2(-\bar{X}x - \bar{Y}y) = 0$.

Полученото уравнение за определяне на функцията на Ери е бихармонично, следователно и самата функция на напреженията е бихармонична.

Удовлетворяване на граничните условия за функцията на Ери

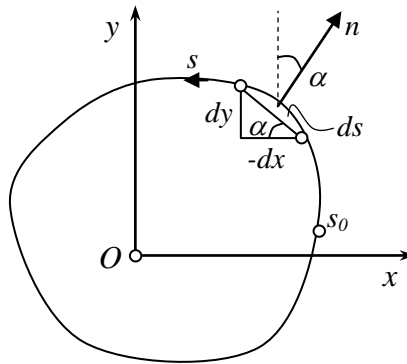
Използвайки функцията на Ери условията на повърхността могат да се запишат във вида:

$$\begin{aligned}X_n &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \bar{X}x \right) l - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} m, \\ Y_n &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} l + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \bar{Y}y \right) m,\end{aligned}\tag{6.4}$$

или при неотчитане на обемните сили:

$$\begin{aligned}X_n &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} m, \\ Y_n &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Функцията $\varphi(x,y)$ е все още неизвестна. Задачата за търсене на напрежения се свежда до задача за определяне на бихармонична функция. В този случай условията на повърхността се явяват гранични условия за определяне на интеграционни константи. Тези условия позволяват да се формулират много просто и удобно граничните условия за самата функция $\varphi(x,y)$ и за нейните частни производни, като се използва понятието за производна по контура s . Приема се криволинейната ос s за положителна, когато е насочена по най-краткия път на оста Ox към оста Oy , както е показано на фиг. 6.1:



Фигура 6.1 Гранични условия за функцията на Ери.

Нека бъде взет един безкрайно малък елемент от контура ds и се издигне външната му нормала n . Тя ще сключва ъгъл α с оста Oy . Непосредствено от фигурата се виждат зависимостите:

$$\begin{aligned} l = \cos(n, x) &= \sin \alpha = \frac{dy}{ds} \\ m = \cos(n, y) &= \cos \alpha = -\frac{dx}{ds} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Като се заместят изрази (6.6) в условията на повърхността, се получава:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ Y_n &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Равенства (6.7) се интегрират от една начална точка на контура $M(s_0)$ до произволна друга точка от него $M(s)$, от което се получава:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\int_{s_0}^s Y_n ds + A; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int_{s_0}^s X_n ds + B. \quad (6.8)$$

Интеграционните константи A и B представляват стойностите на частните производни $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ в началната точка $M(s_0)$. Напреженията се изразяват с вторите производни на функцията на напреженията. По тази причина константите A и B са без значение и ще бъдат приети за нула. При това условие можем да запишем двете равенства (6.8) се записват в следния вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -R_y ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = R_x . \quad (6.9)$$

В тези равенства R_y изразява сумата от проекциите върху оста Oy на всички външни сили, действащи по контура в интервала (s_0, s) , а R_x сумата от проекциите върху оста Ox на същите сили.

Тези равенства са изведени при произволен избор на началната точка s_0 и произволна координатно система xOy . Затова може да се приеме, че координатната система съвпада с тангентата и нормалата в произволна точка s на контура. Тогава горните напрежения (6.9) ще добият вида:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -N(s) ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = Q(s) . \quad (6.10)$$

При този запис $N(s)$ и $Q(s)$ се схващат като нормално и напречно усилия във виртуален прът с конфигурация, съвпадаща с контура на разглеждания равнинен диск, но разрязан в началната точка s_0 . Ако се възползваме от факта, че напречното усилие е първа производна на огъващия момент, може да се запише, че $\varphi(s) = M(s)$.

Проведените до тук разсъждения показват, че стойностите на функцията на напреженията по контура на изследваната област могат да бъдат определени с прости статически изчисления.

Методи за определяне функцията на напреженията

Повечето полуобратни методи за решаване на равнинната задача на линейната теория на еластичността използват функцията на Ери като базова за решението.

Полуобратните методи се характеризират с това, че неизвестната функция $\varphi(x, y)$ се търси в явен вид по отношение на едната независима променлива и в неявен вид по отношение на другата. Именно с търсенето на функцията в неявен вид (по аналитичен път) се увеличава точността на решение на задачата в сравнение с дискретните методи.

Тук ще бъдат илюстрирани на кратко два от тези метода, а именно метод на степенните редове и метод на тригонометричните редове.

➤ метод на степенните редове:

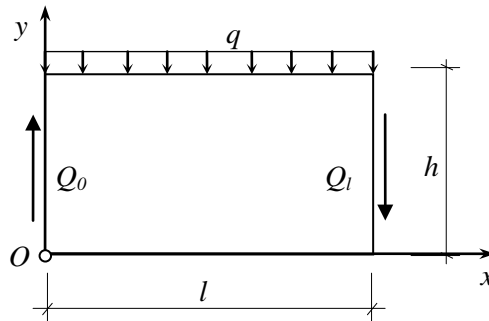
Решението за функцията на Ери се търси във вид на степенен полином:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=0}^n Y_i(y) x^i, \quad (6.11)$$

където $Y_i(y)$ са неизвестни функции само на y . Такова решение е удобно за изследване само на правоъгълни области, когато външното натоварване може да се опише посредством степенен полином. Функциите $Y_i(y)$ се определят от условието функцията на Ери да удовлетворява бихармоничното уравнение. Ако предварително се допусне, че функцията $\varphi(x, y)$ е бихармонична, може да бъде заместена във формулите на Ери (6.2) и да се изразят напреженията, както следва:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^n Y_i'' x^i = Y_0'' + Y_1'' x + Y_2'' x^2 + Y_3'' x^3 + \dots, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^n i(i-1) Y_i x^{i-2} = 2Y_2 + 6Y_3 x + 12Y_4 x^2 + 20Y_5 x^3 \dots, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\sum_{i=0}^n i Y_i' x^{i-1} = -Y_1' - 2Y_2' x - 3Y_3' x^2 - 4Y_4' x^3 - \dots. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Степента на полинома n се определя от граничните условия и вида на натоварването.



Фигура 6.2 Гранични условия и вид на натоварването.

Например при правоъгълна гредостена с константен разпределен товар по горния контур нормалното напрежение σ_y за частта от контура, по който е разпределен товарът, трябва да бъде константа, а за долната част от контура - нула. Следователно полиномът на функцията $\varphi(x, y)$ трябва да бъде от втора степен:

$$\varphi(x, y) = Y_0(y) + Y_1(y)x + Y_2(y)x^2. \quad (6.13)$$

Ако външния товар не е константен, а линеен или квадратна функция на x , тогава $\varphi(x, y)$ трябва да бъде съответно от вида:

$$\varphi(x, y) = Y_0(y) + Y_1(y)x + Y_2(y)x^2 + Y_3(y)x^3 \quad (6.14)$$

респективно:

$$\varphi(x, y) = Y_0(y) + Y_1(y)x + Y_2(y)x^2 + Y_3(y)x^3 + Y_4(y)x^4. \quad (6.15)$$

Следваща стъпка от решението е определянето на функциите $Y_i(y)$. Те се определят от условието функцията на Ери да бъде бихармонична, т.е. да удовлетворяват уравнението:

$$\nabla^4 \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (6.16)$$

След решаване на това диференциално уравнение интеграционните константи се определят от граничните условия. Така функцията $\varphi(x, y)$ става напълно определена и могат да се определят напреженията в произволна точка от областта, а от там и преместванията и деформациите. Приложение на този метод е възможно само за правоъгълни и клинообразни гредостени когато функцията на натоварването може да се представи във вид на степенен полином.

➤ метод на тригонометричните редове:

При метода на тригонометричните редове функцията $\varphi(x, y)$ се търси във вида:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (6.17)$$

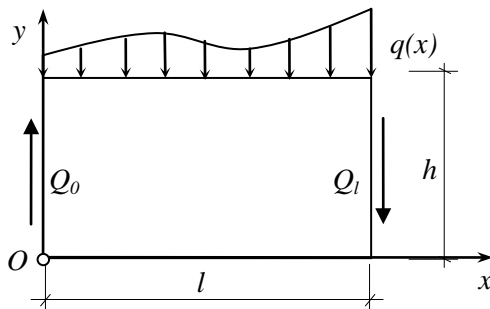
Такова решение е удобно за изследване само на правоъгълни области, за които външното натоварване може да се опише посредством безкраен тригонометричен ред. В този случай напреженията се изразяват по следния начин:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n''(y) \sin \alpha_n x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 Y_n(y) \sin \alpha_n x \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Y_n'(y) \cos \alpha_n x \end{aligned} \quad (6.18)$$

Неизвестните функции $Y_n(y)$ трябва да се определят така, че $\varphi(x, y)$ да удовлетворява бихармоничното уравнение $\nabla^4 \varphi = 0$. Получава се решение, което има вида:

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + C_n y \cdot \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n y \cdot \operatorname{sh} \alpha_n y. \quad (6.19)$$

Интеграционните константи се определят от граничните условия при $y=0$ и $y=h$ – фиг. 6.3:



Фигура 6.3 Схема на натоварването.

От граничното условие за натоварения контур (h, y) , се получава:

$$\sigma_y = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \alpha_n x = q(x), \text{ или } q_n = \alpha_n^2 Y_n(h). \quad (6.20)$$

При дадена функция $q(x)$ n -тия коефициент на Фурие се определя по известната формула:

$$q_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \alpha_n x dx \quad (6.21)$$

следователно за функцията Y_n може да се запише:

$$Y_n(h) = \frac{2}{\alpha_n^2 l} \int_0^l q(x) \sin \alpha_n x dx. \quad (6.22)$$

Този израз заедно с останалите гранични условия образуват система уравнения, от които се определят интеграционните константи A_n , B_n , C_n и D_n , които от своя страна са функция на номера n .

Тъй като при този метод основна предпоставка е, че функцията на външното натоварване $q(x)$ изпълнява условията на Дирихле, то $q(x)$ може да бъде развита в сходящ безкраен ред на Фурие. Интеграционните константи са намаляващи с увеличаване на номера. При това условие функцията Y_n и напреженията могат да се определят с желана от нас точност в зависимост от броя на членовете в реда, който се приеме в изчисленията.

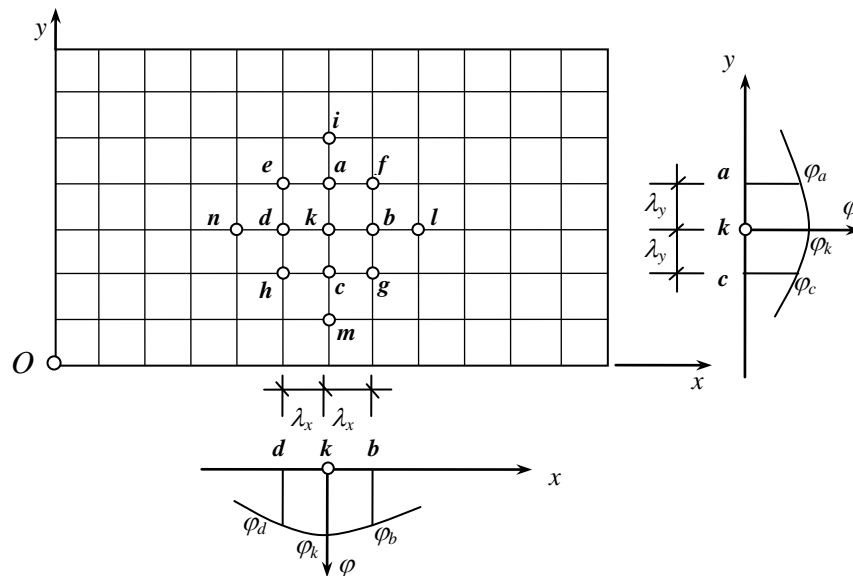
Недостатък на този метод е, че могат да се решават само правоъгълни гредостени с гранични условия единствено в напрежения. Предимство при него е многообразието от външни товари, което може да бъде обхванато.

От групата на дискретните методи накратко ще бъде описан методът на крайните разлики.

Методът на крайните елементи, който също е от тази група, ще бъде описан по-подробно в глава 9.

➤ метод на крайните разлики:

За да се реши равнинната задача е необходимо да се определи функцията $\varphi(x,y)$, така че да удовлетворява бихармоничното уравнение и граничните условия. За да бъде опростена задачата, може да се разсъждава по следния начин (фиг. 6.4).



Фигура 6.4 Мрежа от точки по МКЕ.

Функцията $\varphi(x,y)$ представлява гладка функция, която геометрически може да се изобрази като повърхнина в областта на разглежданата гредостена. Ако разделим областта с правоъгълна мрежа от точки и разгледаме два вертикални разреза на областта, то функцията на напреженията ще има вида, показан на фиг. 6.3.

Ако стойностите на тази функция в достатъчен брой точки са известни, то с достатъчна точност може да се определят напреженията за гредостената. Може да се приеме с достатъчна точност, че функцията $\varphi(x,y)$ се изменя по квадратна парабола в рамките на два интервала (както по x така и по y). Тогава колкото са по-малки интервалите толкова по-точно ще е това приближение.

За функцията $\varphi(x,y)$ независимо за двете перпендикулярни направления може да се запише:

$$\begin{aligned}\varphi(x, const) &= Ax^2 + Bx + C, \\ \varphi(const, y) &= A_1y^2 + B_1y + C_1.\end{aligned}\tag{6.23}$$

Тези изрази се наричат апроксимиращи полиноми.

Отгук нататък изводът ще бъде показан само за направлението x , тъй като за другото направление разсъжденията се повтарят. Неизвестните константи се определят от условията:

$$\begin{aligned} \varphi(0, const) &= \varphi_k & C &= \varphi_k \\ \varphi(-\lambda_x, const) &= \varphi_d, \text{ следователно: } & B &= \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2\lambda_x} \\ \varphi(+\lambda_x, const) &= \varphi_b & A &= \frac{\varphi_b - 2\varphi_k + \varphi_d}{2\lambda_x^2} \end{aligned} \quad (6.24)$$

А за функцията $\varphi(x)$ се получава:

$$\varphi(x, const) = \frac{\varphi_b - 2\varphi_k + \varphi_d}{2\lambda_x^2} x^2 + \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2\lambda_x} x + \varphi_k. \quad (6.25)$$

Съответно по ос y :

$$\varphi(const, y) = \frac{\varphi_a - 2\varphi_k + \varphi_c}{2\lambda_y^2} y^2 + \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2\lambda_y} y + \varphi_k. \quad (6.26)$$

Тези изрази се наричат интерполиращи полиноми. На база на тези изрази могат да се пресметнат всички производни на функцията $\varphi(x,y)$ в точка k , изразени чрез стойностите на функциите $\varphi(x, const)$ и $\varphi(const, y)$ в съседните точки. Тук ще бъдат записани само някои от производните:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \right|_k &= \frac{6\varphi_k - 4(\varphi_b + \varphi_d) + \varphi_j + \varphi_m}{\lambda_x^4} \\ \left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_k &= \frac{\partial^2 \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} \right)}{\partial x^2} \Bigg|_k = \\ &= \frac{4\varphi_k - 2(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + \varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} \\ \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_k &= \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2\lambda_x} \\ \left. \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right|_k &= \frac{\varphi_b - 2\varphi_k + \varphi_d}{\lambda_x^2} \\ \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right|_k &= \frac{\partial \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)}{\partial x} \Bigg|_k = \frac{\varphi_f - \varphi_g - \varphi_e + \varphi_h}{4\lambda_x \lambda_y} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Тъй като функцията на напреженията трябва да удовлетворява уравнение (6.3) за всяка точка от областта то може да се запише:

$$\nabla^4 \varphi \Big|_k = 0. \quad (6.28)$$

Като се заместят изрази (6.27) в (6.28) се получава алгебрично уравнение за функцията $\varphi(x,y)$, заместващо диференциалното уравнение в точка k , а именно:

$$\begin{aligned} (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_k - 4(1 + \alpha)(\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + \\ + 2\alpha(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + \varphi_i + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n = 0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

където:

$$\alpha = \frac{\lambda_y^2}{\lambda_x^2}. \quad (6.30)$$

Това уравнение се записва за всички вътрешни точки от областта. Отчитат се граничните условия и се получава система от n алгебрични уравнения с n неизвестни – възловите стойности на функцията на напреженията. След решаването ѝ могат да се определят и напреженията във всяка точка от мрежата, тъй като те се изразяват също с възловите стойности на производните на $\varphi(x,y)$.

Този метод е прост от математическа гледна точка и е приложим при всякакво натоварване. Дава възможност, макар и приблизително, да се отчетат граничните условия. Основни трудности при него представляват гредостени с неправилна форма и отчитането на някои гранични условия.

ГЛАВА 7

ТЕОРИЯ НА ТЪНКИТЕ КОРАВИ ПЛОЧИ

Тела с формата на призма или цилиндър и с много малка височина в сравнение с размерите на основите, се наричат тънки еластични плочи.

Височината на призмата (цилиндъра) се нарича дебелина и се означава с t . Мислената равнина, която разполовява дебелината се нарича средна равнина – фиг. 7.1.

От геометрична гледна точка понятията плоча и диск (гредостена) се покриват. От гледна точка на тяхното напрегнато и деформирано състояние те се различават съществено. Докато при диска натоварването и подпирането са в средната му равнина, то при плочите товарите и опорните устройства са насочени перпендикулярно на средната равнина. В следствие на деформацията точките от плочата се преместват в направление перпендикулярно на средната равнина – плочата се огъва.

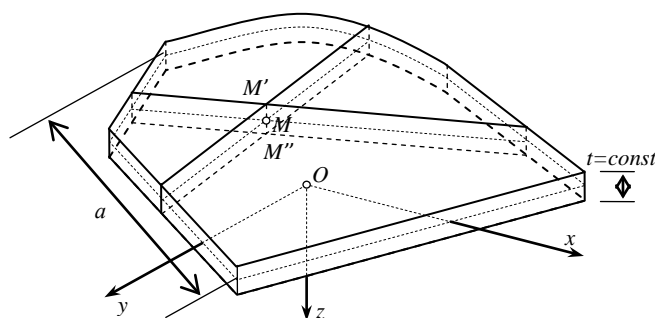
О с н о в н и п о н я т и я и п р е д п о с т а в к и

Основните напрежения, които участват в напрегнато състояние на плочата са напреженията на огъване и мембранни напрежения, свързани с разтежимостта на средната равнина. В зависимост от това кои напрежения преобладават се различават няколко вида плочи:

- ✓ Кора̀ви плочи са такива, в които преобладават огъвните напрежения. Мембранните напрежения са пренебрежимо малки;
- ✓ Гъ̀вка̀ви плочи са тези при които двата вида напрежения са от един и същи порядък;
- ✓ Мембранни плочи са такива, в които преобладават мембранните напрежения, но могат да носят на натиск и огъване;
- ✓ Мембрани са тези в които има само мембранни напрежения.

Плочите могат да бъдат с променлива и постоянна дебелина. Тук ще бъдат разглеждани само такива с константна дебелина. В зависимост от отношението на дебелината на плочата към характерен размер се различават тънки и дебели плочи.

- ✓ Дебели плочи са тези, при които $t/a < 5$, където t е дебелината на плочата и a е характерен размер;
- ✓ Тънки са плочите, при които $t/a > 5$.



Фигура 7.1 Определение за плоча.

За изграждане на изчислителният модел на плоча се приемат допълнителни опростяващи предпоставки, освен тези валидни за общата теория на еластичността. Поради тази причина теорията на тънките кора̀ви плочи се нарича още и *техническа теорията на тънките кора̀ви плочи*.

1. Хипотеза за неразтежимост на средната равнина. Точките от средната равнина получават премествания само по ос z . Ако u_o , v_o и w_o са компонентите на преместването на т. M от средната равнина, то: $u_o=0$; $v_o=0$, $w_o=w(x,y)$.
2. Кинематическа хипотеза на Кирхоф – хипотеза за праволинейните нормали. Всяка отсечка с дължина t перпендикулярна на средната равнината на плочата преди деформацията запазва дължината си t и остава нормална към средната повърхнина, в която е преминала средната равнината след деформацията, т.е. $\varepsilon_z=0$; $\gamma_{xz}=0$; $\gamma_{yz}=0$.
3. Статическа хипотеза на Кирхоф – нормалните напрежения на площадките успоредни на средната равнина, са пренебрежимо малки, т.е. $\sigma_z=0$.

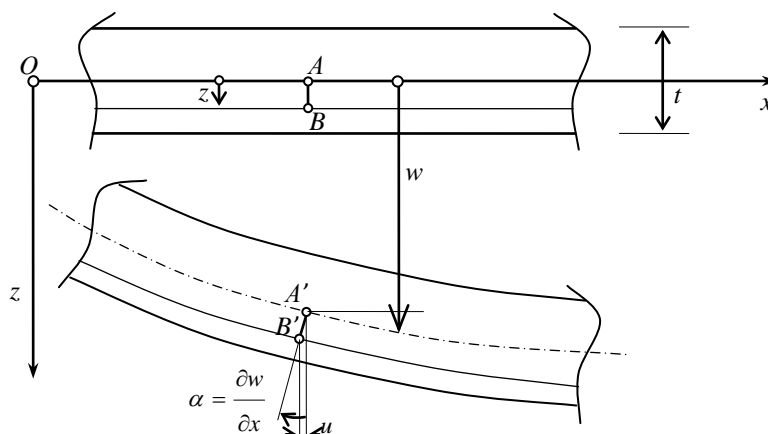
О С Н О В Н И З А В И С И М О С Т И

Разглежда се плоча натоварена с разпределен напречен товар с интензивност $q(x,y)$. От зависимостите на Коши е известно, че: $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$, а от кинематическата хипотеза на Кирхоф имаме $\varepsilon_z=0$. От тук следва:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w(x, y, z) = w(x, y).$$

Това означава, че всички точки от плочата, които лежат на една вертикална отсечка с дължина t , имат едно и също вертикално преместване, равно на преместването на точката от средната равнина на плочата.

Изрази за другите деформации в плочата се получават, ако се разгледа деформацията на напречното ѝ сечение:



Фигура 7.2 Деформации в плочата.

На фиг. 7.2 е показано сечение на плочата с равнина, успоредна на равнината xOz , преди и след деформацията. Според първата хипотеза т. A от средната равнина на плочата има само вертикално преместване ($AA'=w(x,y)$). Като се вземе предвид, че съгласно кинематическата хипотеза $AB=A'B'=z$ и че ъгълът α е много малък (или $\sin \alpha \approx tg \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha = 1$), за преместването на т. B по оста Ox се получава:

$$u(x, y, z) = -z \sin \alpha \approx -z tg \alpha \approx -z \frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (7.1)$$

Аналогично за преместването на т. B по оста Oy се получава:

$$v(x, y, z) = -z \sin \alpha \approx -z tg \alpha \approx -z \frac{\partial w}{\partial y} \Rightarrow v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (7.2)$$

След извеждането на тези основни зависимости може да се запишат уравненията на геометрията за плоча, които се получават във вида:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned} \quad (7.3)$$

Законът на Хук в тримерната задача има вида:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]; & \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]; & \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]; & \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}\end{aligned} \quad (7.4)$$

От израза за σ_z и от статическата хипотеза на Кирхоф, и след известна преработка на (7.4) се получава:

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 0 \Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (7.5)$$

Така закона на Хук (7.4), написан за плочи има вида:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); & \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x); & \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \neq 0 \\ \sigma_z &\neq 0; & \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} \neq 0\end{aligned} \quad (7.6)$$

От тези изрази се вижда, че между приетите хипотези и закона на Хук има противоречие. Приетите хипотези са приемливи само при определяне на деформациите. Напряженията σ_z , τ_{xz} и τ_{yz} трябва да се запазят ненулеви, въпреки противоречието за да могат да се удовлетворят условията за равновесие. В това се състои приблизителността на теорията на тънките корави плочи.

Ако се вземат предвид зависимостите между деформации и премествания изразите за напреженията получават вида:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (7.7)$$

Напрежението σ_z има пренебрежимо малки стойности и затова няма практическо значение. За напреженията τ_{xz} , τ_{yz} се получава:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f_1(x, y) \\ \tau_{yz} &= -\frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + f_2(x, y)\end{aligned}\quad (7.8)$$

При плочи с постоянна дебелина интеграционните функции се определят от условия:

$$\tau_{xz} \left(x, y, \pm \frac{t}{2} \right) = 0; \quad \tau_{yz} \left(x, y, \pm \frac{t}{2} \right) = 0. \quad (7.9)$$

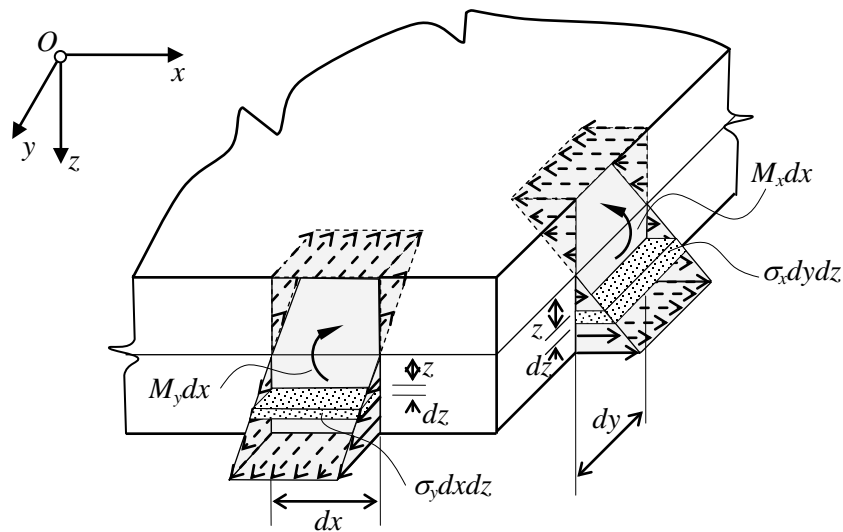
Така се получава:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w\end{aligned}\quad (7.10)$$

Задачата за определяне на напреженията, деформациите и преместванията в тънка корава плоча е двумерна, защото всички величини зависят само от x , y . Напреженията σ_x , σ_y и τ_{xy} се изменят по линейен закон по височината (дебелината) на плочата. Напреженията τ_{xz} , τ_{yz} се изменят по закон на квадратна парабола.

Разрезни усилия при плоча

Обстоятелството, че законът на изменение на напреженията е известен, позволява те да бъдат редуцирани в разрезни усилия, действащи върху средната равнина на плочата. Подробният извод на тази редукция е описан в [1] и [2].



Фигура 7.3 Разрезни усилия при плоча.

Напреженията σ_x , действащи върху сечението $x=const$ по елементарна площадка $dydz$ имат равнодействаща - елементарна сила $\sigma_x dydz$. Моментът на тази сила спрямо средната равнина е $\sigma_x z dydz$. Тогава моментът на всички елементарни силчки, които действат по цялата дебелина на плочата на единица дължина от разглежданото сечение, ще бъде:

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_x z dz . \quad (7.11)$$

M_x е интензивността на огъващия момент на плочата, действащ върху сечението с нормала успоредна на оста Ox .

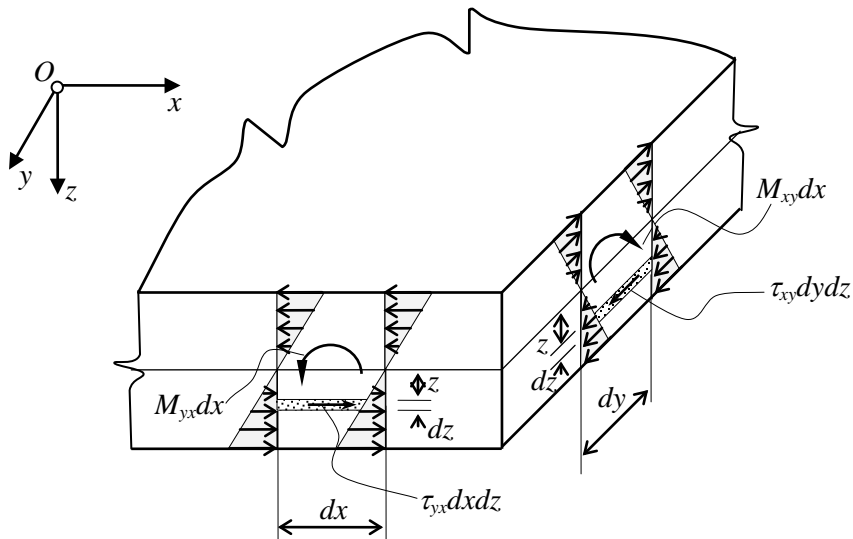
По аналогичен начин се получава изразът за момента M_y :

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_y z dz . \quad (7.12)$$

Тук M_y е интензивността на огъващия момент на плочата, действащ върху сечението $y=const$ с нормала успоредна на оста Oy .

Нормалните сили N_x и N_y се получават равни на нула.

От редукция на тангенциалните напрежения τ_{xy} се получават усукващите моменти.

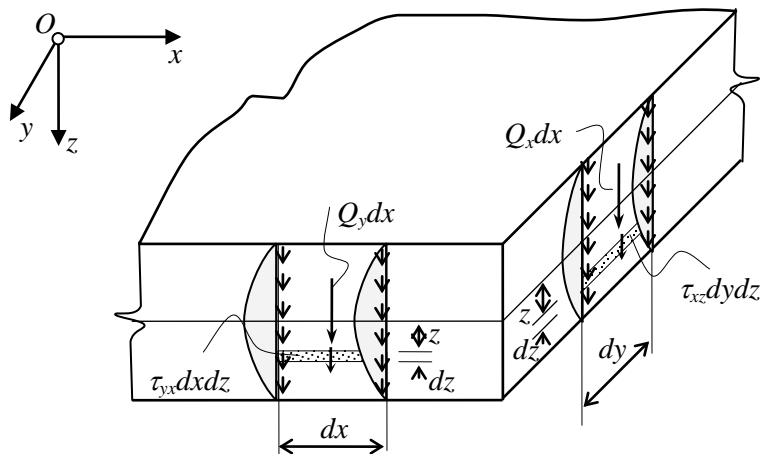


Фигура 7.4 Тангенциални напрежения и усукващи моменти.

Изразът за този момент се получава чрез аналогични разсъждения и има вида:

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz . \quad (7.13)$$

Тук M_{xy} е интензивността на усукващия момент на плочата, действащ върху сеченията $y=const$ и $x=const$. Всички моменти имат дименсия Nm/m . Напречните сили се получават чрез тангенциалните напрежения τ_{xz} и τ_{yz} са (фиг. 7.5):



Фигура 7.5 Редукция на тангенциалните напрежения

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz . \quad (7.14)$$

Величините Q_x и Q_y са интензивностите на напречните усилия, действащи върху сеченията $y=const$ и $x=const$. Дименсията им е N/m .

След получаване на изрази за разрезните усилия те могат да се представят като функция на преместването w . Това се получава от закона на Хук за плочи (изразен чрез преместването w) чрез интегриране горните изрази. Резултатът е:

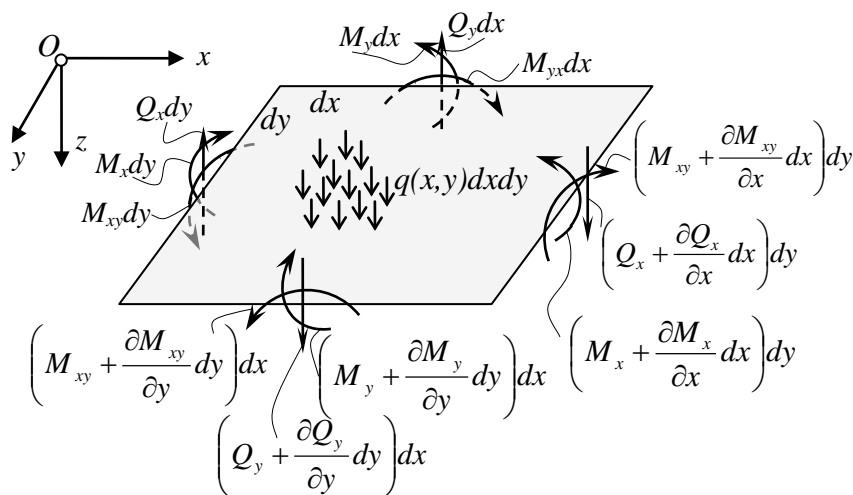
$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); & Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); & Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \\ M_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (7.15)$$

където D се нарича цилиндрична коравина и за плоча с $t=const$ има вида:

$$D = \frac{Et^3}{12}.$$

Диференциално уравнение на плоча

За получаването на диференциалното уравнение на плочата се разглежда равновесието на диференциален елемент от средната равнина на плочата, който се намира под действието на разрезните усилия и външния товар – фиг. 7.6:



Фигура 7.6 Равновесие на диференциален елемент на плоча.

От равновесните условия получаваме:

$$\sum Z = 0: \quad \frac{\partial Q_y}{\partial y} dydx + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy = -q(x, y) dx dy \quad (a)$$

$$\sum M_y = 0: \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (b) \quad (7.16)$$

$$\sum M_x = 0: \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (c)$$

или като се замести (b) и (c) в (a) се получава следният резултат:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y). \quad (7.17)$$

От проекционните уравнения:

$$\sum X = 0 ; \sum Y = 0 ; \sum M_z = 0$$

се получават зависимостите за взаимност на усукващите моменти, имащи вида:

$$M_{xy} = M_{yx}; M_{yz} = M_{zy}; M_{xz} = M_{zx}.$$

Уравнение (7.17) е частно диференциално уравнение от втори ред относно разрезните усилия действащи в плоча с постоянна дебелина под действието на разпределен товар.

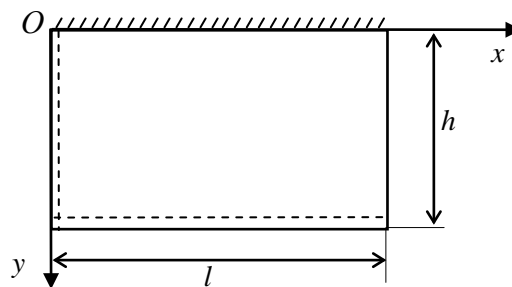
Ако в уравнение (7.17) всички разрезни усилия се представят чрез преместването w се достига до следния вид на уравнението:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \quad \text{или} \quad D \nabla^4 w = q(x, y). \quad (7.18)$$

Уравнение (7-18) е диференциално уравнение от четвърти ред относно преместването w . Това уравнение се нарича *уравнение на Софи Жермен – Лагранж* и е основна зависимост в техническата теория на тънките корави плочи. То е достатъчно за определяне на основното неизвестно, а именно преместването w . Както се вижда от изведените до тук изрази, всички неизвестни (напрежения, в частност усилия и деформации) се изразяват една единствена функция – преместването w . Ако тя бъде определена ще може да се определят и напреженията. Така задачата за напрегнатото и деформирано състояние на тънка корава плоча се свежда до решаването на едно единствено уравнение – уравнението на Софи Жермен – Лагранж. То има смисъл на равновесно условие. Решението на това уравнение трябва да удовлетворява граничните условия.

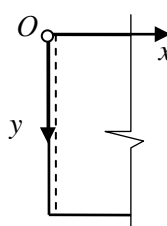
Гранични условия и опорни реакции

Задачата за плоча ще има единствено решение, ако функцията $w(x,y)$ удовлетворява не само диференциалното уравнение, но и граничните условия, които съответстват на конкретен начин на подпиране. Тъй като уравнението е от четвърта степен, то за всеки край на плочата трябва да бъдат формулирани по две условия. Граничните условия могат да се запишат само за премествания, само за усилия или смесено – за усилия и премествания. При плочи, контурът на които се състои от прави линии, успоредни на координатните оси, са възможни следните случаи – (фиг. 7.7):



Фигура 7.7 Гранични условия в плоча.

При свободно подпряна плоча (отговарящо на подвижна или неподвижна опора в строителната статика на строителните конструкции):



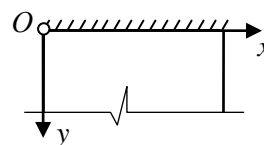
$$w(0, y) = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x=0} = 0$$

или

$$M_x(0, y) = 0: -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} w(0, y) &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right|_{x=0}$$

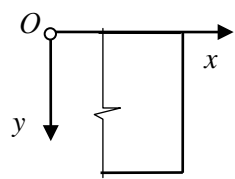
При запънат край (отговарящо на запъване в строителната статика на строителните конструкции):



$$w(x, h) = 0:$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=h} = 0$$

При свободен край (отговарящо на свободен край в строителната статика на строителните конструкции):



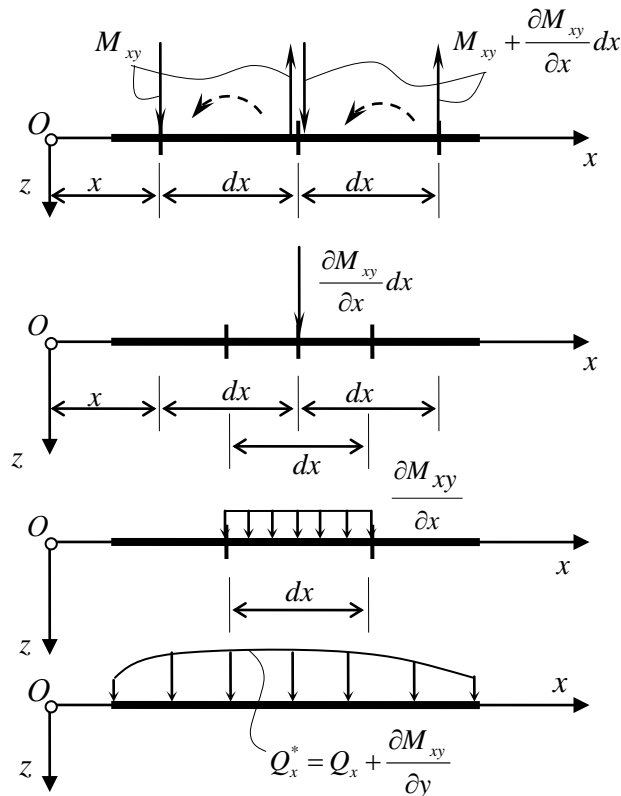
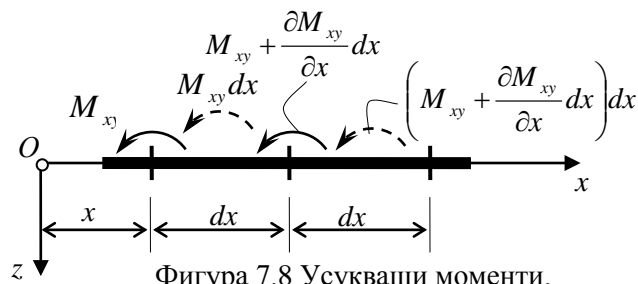
$$M_x(l, y) = 0: -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$Q_x^*(l, y) = 0: Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$$

Q_x^* се нарича обобщена напречна сила.

Обобщените напречни усилия могат да се онагледят по следния начин. Ако се вземе елемент от плочата успореден на оста Ox , то в сечения x и $x+dx$ действат

следните усукващи моменти: M_{xy} и $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$.



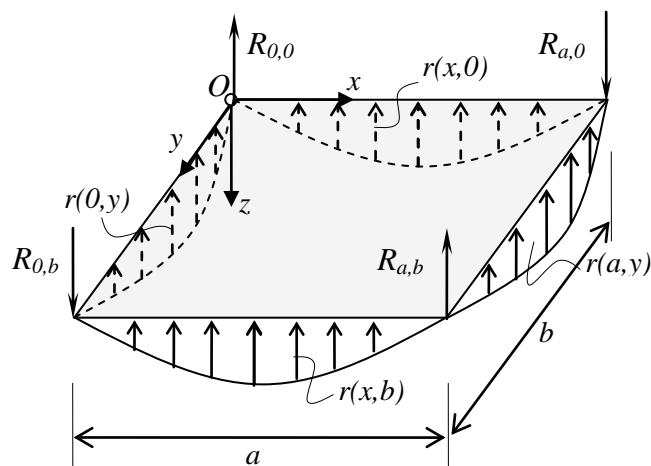
Равнодействащите моменти върху двата съседни участъка с дължини dx са съответно: $M_{xy} dx$ и $\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right) dx$ както е показано на фигура 7.9. Всеки от тези два момента заменяме със съответна двоица с рамо dx .

Така на границата на двата елемента като резултат се получава сила със стойност $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$. Ако тази сила разделим на dx ще получим еквивалентен

разпределен товар с интензивност $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$. Именно това усилие прибавено към

напречното усилие Q_x дава обобщеното напречно усилие Q_x^* . Аналогично и за обобщеното напречно усилие Q_y^* .

С помощта на тези обобщени напречни усилия може да се определят и разпределени и концентрирани опорни реакции при плочи с константен равномерно разпределен товар по цялата площ:



Фигура 7.10 Опорни реакции в плоча.

Разпределените опорни реакции са:

$$\begin{aligned} r(0, y) &= Q_x^*(0, y) \\ r(a, y) &= -Q_x^*(a, y) \\ r(x, 0) &= Q_x^*(x, 0) \\ r(x, b) &= Q_x^*(x, b) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Концентрираните опорни реакции са:

$$\begin{aligned}
R_{0,b} &= 2M_{x,y}(0,b) \\
R_{a,b} &= 2M_{x,y}(a,b) \\
R_{a,0} &= 2M_{x,y}(a,0) \\
R_{0,0} &= 2M_{x,y}(0,0)
\end{aligned}
\tag{7.20}$$

Концентрираните сили в ъглите на плочите са характерна особеност само на теорията на Кирхов.

ГЛАВА 8

ЕНЕРГЕТИЧНИ ПРИНЦИПИ И МЕТОДИ, ИЗПОЛЗВАНИ В ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА

Когато върху едно тяло, намиращо се в равновесие бъде приложена система от сили, нарастваща от нула до крайната си стойност, при което тялото остава в равновесие, външните сили извършват положителна работа, а вътрешните - отрицателна. При този процес в тялото се натрупва потенциална енергия. Подробно енергетичните принципи и теореми са описани в [1].

Работата на външните сили при идеално еластично изотропно и хомогенно тяло се изразява по следния начин:

$$\begin{aligned}
W_{ext} &= \frac{1}{2} Fs && \text{– за линейно еластични системи} \\
W_{ext} &= \int_0^s F ds && \text{– за нелинейно еластични системи}
\end{aligned}
\tag{8.1}$$

където F представлява външна сила, а s съответстващото ѝ проектирано преместване.

Работата на вътрешните сили за единица обем от тялото, при нарастване на деформацията от нула до определена стойност ε_x , се записва както следва:

$$u = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \tag{8.2}$$

При линейно еластични системи за елементарен обем се получава изразът:

$$u = \int_0^{\varepsilon_\alpha} \sigma_\alpha d\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \tag{8.3}$$

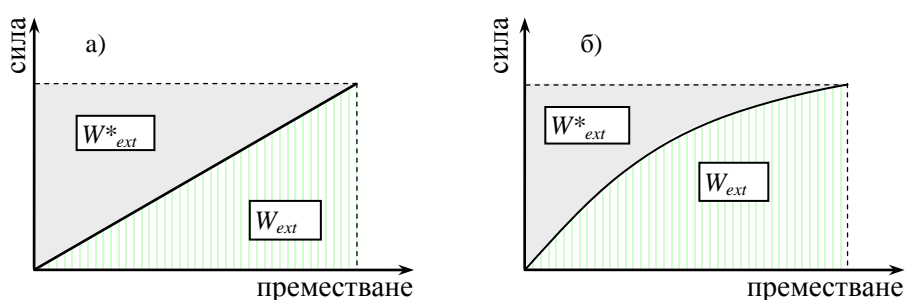
За цялото тяло се получава:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV. \quad (8.4)$$

Тук u се нарича специфична деформационна работа и е потенциал на деформациите, взет с обратен знак.

Допълнителна работа на външните сили системата W_{ext}^* се нарича площта, която допълва действителната работа W_{ext} до площ на правоъгълник. При линейно-еластични системи (фиг. 8.1 а))- допълнителната и действителната работи са еднакви.

$$W_{ext}^* = W_{ext} \quad (8.5)$$



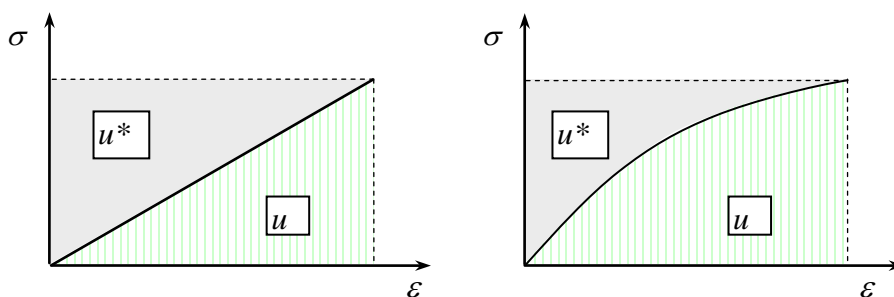
Фигура 8.1 Действителна и допълнителна работа при линейно и нелинейно еластични системи.

Допълнителната потенциална енергия на деформациите представлява площта, допълваща действителната такава до площ на правоъгълник.

- при линейно еластични системи допълнителната потенциална енергия (фиг. 8.2 а)) се изразява по следния начин:

$$u^* = \sum \int_0^{\sigma_\alpha} \varepsilon_\alpha d\sigma_\alpha \quad (8.7)$$

$$U^* = \int_V u^* dV$$



Фигура 8.2 Действителна и допълнителна потенциална енергия при линейно и нелинейно еластични системи.

Възможна работа се нарича работата, която се извършва при възможно нарастване на деформациите (преместванията) от съответстващото нарастване на силите:

Възможната работа на външните сили се записва по следния начин:

$$\Delta W_{ext} = F_i \delta s_i + \frac{1}{2} \delta F_i \delta s_i \text{ - за линейно еластични системи} \quad (8.8)$$

$$\Delta W_{ext} = F_i \delta s_i + \frac{1}{2} \delta F_i \delta s_i + \dots \text{ - за нелинейно еластични системи} \quad (8.9)$$

Съответно възможната работа на вътрешните сили е:

$$\Delta u = \sigma_\alpha \delta \varepsilon_\alpha + \frac{1}{2} \delta \sigma_\alpha \delta \varepsilon_\alpha \quad (8.10)$$

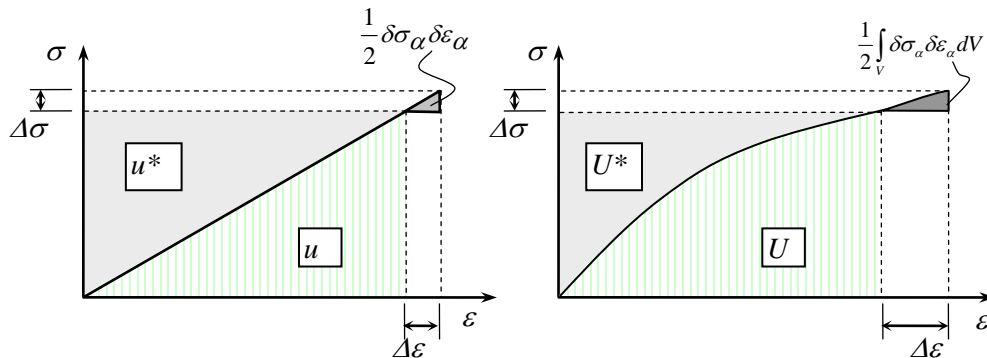
$$\Delta U = \int_V \sigma_\alpha \delta \varepsilon_\alpha dV + \frac{1}{2} \int_V \delta \sigma_\alpha \delta \varepsilon_\alpha dV . \quad (8.11)$$

Графически, възможната работа е илюстрирана на фиг. (8.3).

Ако в изразите от (8.8) до (8.11) се пренебрегнат вторите членове ще се получат изразите:

$$\Delta W_{ext} = \delta W_{ext} = F_i \delta s_i . \quad (8.12)$$

$$\Delta U = \delta U = \int_V \sigma_\alpha \delta \varepsilon_\alpha dV \quad (8.13)$$



Фигура 8.3 Действителна и допълнителна потенциална енергия при линейно и нелинейно еластични системи.

Тези изрази показват, че има изменение на преместванията без изменение на външните сили. Такова състояние е хипотетично и затова се нарича виртуално преместване. Работата, която се извършва при това преместване се нарича виртуална работа. Съответно при работата на вътрешните сили се получава изменение на деформациите без изменение на напреженията.

За възможната допълнителна работа се получават следните изрази:

$$\Delta W_{ext}^* = s_i \delta F_i + \frac{1}{2} \delta s_i \delta F_i \text{ - за линейно еластични системи} \quad (8.14)$$

$$\Delta W_{ext}^* = s_i \delta F_i + \frac{1}{2} \delta s_i \delta F_i \text{ - за нелинейно еластични системи} \quad (8.15)$$

За възможната допълнителната пълна деформационна енергия се получава:

$$U^* = \int_V \varepsilon_\alpha \delta \sigma_\alpha dV + \frac{1}{2} \int_V \delta \varepsilon_\alpha \delta \sigma_\alpha dV, \quad (8.16)$$

или при пренебрегване на малките членове от втори порядък следва:

$$\Delta W_{ext}^* = s_i \delta F_i \text{ - за линейно еластични системи} \quad (8.17)$$

$$\Delta W_{ext}^* = s_i \delta F_i \text{ - за нелинейно еластични системи} \quad (8.18)$$

$$U^* = \int_V \varepsilon_\alpha \delta \sigma_\alpha dV. \quad (8.19)$$

Полученото състояние е хипотетично, при което има изменение на външните сили при постоянни премествания и изменения на напреженията при константни деформации. Тези състояния се наричат виртуални.

П р и н ц и п н а в ъ з м о ж н и т е п р е м е с т в а н и я

На система намираща се в равновесие под действие на система сили се задава виртуално преместване съобразено с кинематичните връзки наложени на системата. За работата на повърхнинните и обемните сили се получава израз:

$$\delta W_{ext} = \int_V \{\bar{X}\}^T \{\delta s\} dV + \int_\Omega \{X_n\}^T \{\delta s\} d\Omega \quad (8.20)$$

За деформационната работа имаме израз:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\} dV = \\ &= \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \end{aligned} \quad (8.21)$$

В израз (8.21) деформациите се представят чрез преместванията, следвайки зависимостите на Коши, и се прилага формулата на Гаус-Остроградски за всеки член на подинтегралната функция. В резултат, за възможната работа на вътрешните сили се получава:

$$\delta U = \int_{\Omega} \left[(\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n) \delta u + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n) \delta v + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n) \delta w \right] d\Omega -$$

$$- \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta v + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \delta w \right] dV .$$

(8.22)

Като се вземат предвид изразите за условията на повърхността и условията за равновесие от пространствената задача, се получава следното:

$$\delta U = \int_{\Omega} \{X_n\}^T \{\delta s\} d\Omega + \int_V \{\bar{X}\}^T \{\delta s\} dV .$$

(8.23)

Сравнявайки израза (8.23) и (8.20) се вижда, че:

$$\delta U = \delta W_{ext} .$$

(8.24)

Уравнение (8.24) дава израз на принципа на възможните премествания, който гласи:

Ако една система, намираща се в равновесие под действието на система от външни сили, се зададе безкрайно малко възможно преместване, то работата, която ще извършат външните сили по това преместване, ще бъде равна на работата, която извършват вътрешните сили (напреженията) по деформациите, предизвикани от възможните премествания.

В сила е и обратното: Ако работите на вътрешните и на външните сили, извършвана привсяко възможно безкрайно малко преместване са равни, то тази система се намира в устойчиво равновесие.

П р и н ц и п н а в ъ з м о ж н и т е н а п р е ж е н и я

Изводът на този принцип се осъществява аналогично на предходния.

Принципът на възможните напрежения гласи:

Ако на едно тяло, намиращо се в равновесие под действието на система сили, зададем безкрайно малко възможно изменение на силите допълнителната работа, която ще извършат те по действителните премествания, е равна на допълнителната работа, която извършват получените при това състояние напрежения по действителните деформации.

П р и н ц и п з а с т а ц и о н а р н о с т н а п ъ л н а т а п о т е н ц и а л н а е н е р г и я

Пълната потенциална енергия представлява сумата от работата на външните сили и потенциалната енергия на деформациите.

Промяната на пълната потенциална енергия на едно тяло е равна на работата на външните сили и потенциалната енергия на деформациите при прехода на системата от крайно деформирано състояние до начално недеформирано. При

консервативни сили пълната потенциална енергия на деформациите не зависи от пътя на интегрирането, а само от началното и крайното положение на системата. Работата на външните сили при обратния преход е:

$$W_{ext} = -\{F\}^T \{s\}. \quad (8.25)$$

Тук външните сили участват с пълните си стойности. Работата на вътрешните сили се дава от израза:

$$U = \int_V \left(\sum \int_0^{\varepsilon_\alpha} \sigma_\alpha d\varepsilon_\alpha \right) dV. \quad (8.26)$$

Пълната потенциална енергия се получава:

$$\Pi = \int_V \left(\sum \int_0^{\varepsilon_\alpha} \sigma_\alpha d\varepsilon_\alpha \right) dV - \{F\}^T \{s\}. \quad (8.27)$$

Ако се зададе възможно преместване на системата за възможната работа на вътрешните и външните сили се получава:

$$\delta U = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV \quad (8.28)$$

$$\delta W_{ext} = -\{F\}^T \{\delta s\}. \quad (8.29)$$

За промяната на пълната потенциална енергия се получава:

$$\delta \Pi = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV - \{F\}^T \{\delta s\} = \delta U - \delta W_{ext}. \quad (8.30)$$

От принципа на възможните премествания, според който $\delta U = \delta W_{ext}$, следва, че възможното изменение на пълната потенциална енергия е равно на нула:

$$\delta \Pi = 0 \quad (8.31)$$

От израз (8.31) следва: За системи намиращи се в равновесие пълната потенциална енергия има екстремум. При устойчиво равновесие пълната потенциална енергия има минимум, а при неустойчиво равновесие има максимум.

Т е о р е м а н а К а с т и л я н о

Нека е дадено идеално еластично хомогенно изотропно тяло, намиращо се в равновесие под действието на система сили, които предизвикват съответни премествания. Частната производна на потенциалната енергия на деформациите по

отношение на преместването в дадена точка е равна на силата, приложена в тази точка. Тази теорема лесно се извежда от принципа за стационарност на пълната потенциална енергия. Този извод тук няма да бъде показан.

Теорема на Кроти - Енгесер

Нека е дадено идеално еластично хомогенно изотропно тяло, намиращо се в равновесие под действието на система сили, които предизвикват съответни премествания.

Първата частна производна на допълнителната потенциална енергия на деформациите по отношение на силата в дадена точка е равна на преместването в тази точка.

Изводът на тази теорема отново се базира на принципа за стационарност на пълната потенциална енергия, но записан чрез допълнителната енергия на деформациите и допълнителната работа на външните сили.

Теорема на Бети. Теорема за взаимност на работите

Нека е дадено идеално еластично хомогенно изотропно тяло, намиращо се в равновесие под действието на система сили, които предизвикват съответни премествания.

Нека са дадени две отделни състояния състояние I - системи от сили, предизвикващи съгласувани премествания и състояние II друга система сили, предизвикващи съответстващи съгласувани премествания. За удобство силите и преместванията от състояние I ще бъдат означени с Q_1 и q_1 . Силите и преместванията от състояние II ще бъдат означени с Q_2 и q_2 .

Нека се приеме, че първото състояние е действително, а второто възможно в духа на принципа на възможните премествания. Тогава работата на външните сили ще бъде:

$$W_{ext}^I = \frac{1}{2} Q_1 q_1 + \frac{1}{2} Q_2 q_2 + Q_1 q_2 \quad (8.32)$$

Ако сега се приеме обратното, състояние II за действително, а състояние I за виртуално. В този случай работата ще бъде:

$$W_{ext}^{II} = -\frac{1}{2} Q_1 q_1 + \frac{1}{2} Q_2 q_2 + Q_2 q_1 \quad (8.33)$$

В двата случая, обаче, работата на вътрешните сили е една и съща или:

$$U^I = U^{II}$$

От принципа на възможните премествания е известно, че:

$$U = W_{ext},$$

следователно:

$$U = W_{ext}^I = W_{ext}^II$$

или

$$Q_2 q_1 = Q_1 q_2$$

Теорема на Максвел. Теорема за взаимност на преместванията

Ако първата група сили се състои само от една сила $Q_{1,I}$, а втората само от една сила $Q_{2,II}$. Нека техните стойности са равни на единица. От теоремата на Бети се получава следното:

$$\begin{aligned} q_{1,II} Q_{1,I} &= q_{2,I} Q_{2,II} \\ q_{1,II} &= d_{11} \cdot 0 + d_{12} Q_{2,II} \\ q_{2,I} &= d_{21} Q_{1,I} + d_{22} \cdot 0 \\ \Rightarrow d_{12} &= d_{21} \text{ или } d_{ij} = d_{ji} \end{aligned} \tag{8.34}$$

Преместванията на приложените точки на силите от състояние I, получени от товарно състояние II, са равни на преместванията на приложените точки на силите от състояние II, получени от товарно състояние I.

ГЛАВА 9

МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ В РАВНИННАТА ЗАДАЧА НА ТЕОРИЯ НА ЕЛАСТИЧНОСТТА

При изследване на напрегнатото и деформирано състояние (НДС) на дадено тяло в теория на еластичността (ТЕ) най-напред се изучава поведението на произволен безкрайно малък диференциален елемент и на тази база се съставят диференциални уравнения, които описват поведението на цялото тяло.

В метода на крайните елементи се използва аналогичен подход, но уравненията за равновесие се записват за крайно малък елемент, т. е. за елемент с малки, но крайни размери. За да се извърши това, тялото предварително се разделя на краен брой подобласти с малки размери. От това разделяне идва и името на метода – метод на крайните елементи (МКЕ). Процесът на разчленяване на изследваната област на краен брой крайни елементи се нарича дискретизация на областта. След това разчленяване се избира основно неизвестно на метода –

напрежения или премествания. При този избор се въвеждат определенията МКЕ в напрежения и МКЕ в премествания. Масово разпространен в световната практика е МКЕ в премествания. Поради тази причина тук ще бъде разгледан само той.

В МКЕ в премествания за основни неизвестни са възловите премествания на краен брой избрани точки (възли) по границите на всеки краен елемент. В областта на крайния елемент функцията на преместванията се избира по определен закон. Тези функции се наричат апроксимационни. Всички други неизвестни се представят чрез преместванията по известните от теория на еластичността зависимости. Накрая се записват условията за равновесие, от които след отчитане на граничните условия се определят основните неизвестни – възловите премествания. Повече информация за МКЕ може да бъде намерена в [3] и [5].

Основни предпоставки в МКЕ при решаване на поставената задача

- ✓ В сила е законът на Хук – напреженията са линейни функции на деформациите;
- ✓ Преместванията са малки в сравнение с размерите на телата, деформациите са малки в сравнение с единица;
- ✓ Условията за равновесие се записват за недеформираното положение на тялото.

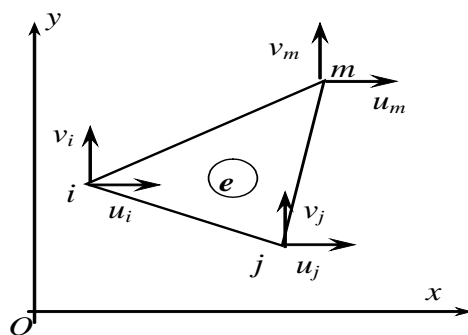
За да се приложи МКЕ към конкретен обект, трябва да се разработи с модел на краен елемент, който да описва поведението му от гледна точка на строителната механика. За решението на гредостена, плоча или тримерен обект е необходимо да имаме разработен краен елемент със съответните степени на свобода и връзки между премествания, деформации и напрежения. Въпреки многообразието на елементи (по тип, форма, точност на апроксимацията, местоположение и вид на възловите параметри) изчислителните операции са едни и същи. Тези операции не зависят от вида на изследваната задача, което е една от най-силните страни на този метод.

Известно е, че в равнинната задача има две основни премествания, а именно преместванията $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ в равнината xOy . В такъв случай трябва да бъде разработен краен елемент, на който във всеки възел да бъдат въведени по две неизвестни възлови премествания.

Общата процедура за решение на равнинната задача с МКЕ ще бъде илюстрирана, използвайки най-простия краен елемент.

Триъгълен краен елемент с 6 степени на свобода

Триъгълен краен елемент с 6 степени на свобода е най-простият краен елемент – фиг.9.1. Възловите му точки i, j и m съвпадат с върховете на триъгълника, а неизвестни параметри са възловите премествания u_i, v_i, u_j, v_j, u_m и v_m .



Фигура 9.1 Триъгълен КЕ с 6 степени на свобода.

Приетите шест неизвестни, изискват апроксимиращите функции на преместванията $u(x,y)$ и $v(x,y)$ да съдържат по три компонента. Поради това тези функции могат да се изберат като пълни полиноми от първа степен.

1. Апроксимиране на функциите на преместванията с помощта на пълнен двумерен полином от първа степен.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (9.1)$$

или в матричен вид:

$$\{f(x, y)^e\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}, \quad (9.2)$$

$$\{f(x, y)^e\} = [P(x, y)]. \{ \alpha \}. \quad (9.3)$$

Неизвестните коефициенти α_i , а от там и функциите на преместванията в областта на елемента трябва да се изразят чрез възловите премествания $\{Z^e\}$.

2. Изразяване на функциите на преместванията чрез възловите параметри (преместванията на възлите на крайния елемент).

За да се осъществи това в изразите за преместванията (9.3) последователно се заместват координатите на възлите i, j и m – фиг. 9.1.

$$i(x_i, y_i) ; j(x_j, y_j) ; m(x_m, y_m) \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned}
u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\
v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\
u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\
v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\
u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \\
v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m
\end{aligned} \quad (9.5)$$

В матричен вид:

$$\{Z^e\} = [C] \cdot \{\alpha\}, \quad (9.6)$$

където:

$$\begin{aligned}
\{\alpha\} &= [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6]^T \quad \{Z^e\} = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_m \ v_m]^T \\
[C] &= \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (9.7)$$

След като се изрази вектора на неизвестните параметри $\{\alpha\}$ чрез вектора на възловите премествания $\{Z^e\}$ и се замести в израза за функциите на преместванията (9.6), се получава:

$$\begin{aligned}
\{\alpha\} &= [C]^{-1} \cdot \{Z\} \quad \text{или} \\
\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_m & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_m \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_m \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix},
\end{aligned} \quad (9.8)$$

където

$$\begin{aligned}
a_i &= x_j y_m - x_m y_j; & a_j &= x_m y_i - x_i y_m; & a_k &= x_i y_j - x_j y_i \\
b_i &= y_j - y_m; & b_j &= y_m - y_i; & b_m &= y_i - y_j; \\
c_i &= x_m - x_j; & c_j &= x_i - x_m; & c_m &= x_j - x_i;
\end{aligned} \quad (9.9)$$

$2A^e = x_j y_m + x_i y_j + x_m y_i - x_j y_i - x_m y_j - x_i y_m$ е равна на удвоената площ на крайния елемент.

Функциите на преместванията в рамките на крайния елемент добиват вида:

$$\{f(x, y)^e\} = \{P(x, y)\} \cdot [C]^{-1} \cdot \{Z^e\}, \quad (9.10)$$

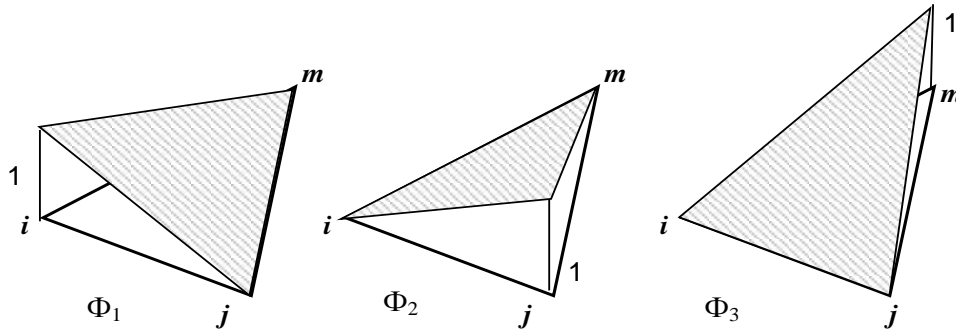
или

$$\{f(x, y)^e\} = [\Phi] \cdot \{Z^e\}, \quad (9.11)$$

където

$$[\Phi] = \{P(x, y)\} \cdot [C]^{-1}. \quad (9.12)$$

Матрицата $[\Phi]$ се нарича матрица с функции на формата. Тези функции представляват интерполиращи функции, даващи връзка между преместванията в областта на крайния елемент и възловите премествания – основните неизвестни параметри. Функциите на формата имат следния вид:



Фигура 9.2 Функции на формата.

$$[\Phi] = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_m & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_m \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_m \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

$$\Phi_1 = a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y; \quad \Phi_2 = a_j + b_j \cdot x + c_j \cdot y; \quad \Phi_3 = a_m + b_m \cdot x + c_m \cdot y$$

След като са известни зависимостите между функциите на преместванията и възловите премествания на крайния елемент може да се запишат условията за равновесие изразени чрез възловите параметри. Това се осъществява чрез познатите от теория на еластичността зависимости между напрежения, деформации и премесвания, и възползвайки се от принципа на възможните премествания.

Резултатът, от математическа гледна точка, представлява пълна система линейни алгебрични уравнения, от която се определят основните неизвестни – възловите премествания. Познавайки тях по обратен път се определят напреженията, деформациите и преместванията.

Основни зависимости от теория на еластичността

1. Зависимост между деформации и премествания:

$$\{\varepsilon^e\} = [\partial] \cdot \{f(x, y)^e\} = [\partial] \cdot [\Phi] \cdot \{Z^e\} = [B] \cdot \{Z^e\}, \quad (9.14)$$

където матрицата $[\partial]$ се нарича матрица диференциален оператор и има вида:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (9.15)$$

матрицата $[B]$ се нарича матрица на деформациите и се получава както следва:

$$[B] = [\partial] \cdot [\Phi] = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}. \quad (9.16)$$

2. Зависимост между напрежения и деформации се получава:

$$\{\sigma^e\} = [D] \cdot \{\varepsilon^e\} = [D] \cdot [B] \cdot \{Z^e\}, \quad (9.17)$$

$[D]$ е матрица на физическите характеристики според обобщения закон на Хук:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Условия за равновесие, записани чрез принципа на възможните премествания

За записване на условията за равновесие ще бъде използван принципът на възможната работа, което позволява да се направи аналогия с матричния метод на преместванията.

Принципът на възможната работа гласи:

Ако дадено деформируемо тяло е в равновесие, то при всяко възможно изменение на преместванията му, възможната работа на външните сили W_{ext} е равна на възможната работа на съответстващите им вътрешни сили W_{int} .

Възможните премествания се приемат за безкрайно малки и съгласувани с наложените връзки. Този принцип е в сила както за цялото тяло, така и за всеки краен елемент от него. Вътрешните сили (напреженията) в елемента образуват вектора $\{\sigma^e\}$.

Възможното изменение на възловите премествания се означават по следния начин:

$$\{\delta Z^e\}^T = \{\delta u_i \delta v_i \delta u_j \delta v_j \delta u_m \delta v_m\}. \quad (9.19)$$

На него съответства възможно изменение на функцията на преместванията:

$$\{\delta f(x, y)^e\} = [\Phi] \cdot \{\delta Z^e\} \quad (9.20)$$

и възможно изменение на функцията на деформациите:

$$\{\delta \varepsilon^e\} = [B] \cdot \{\delta Z^e\}. \quad (9.21)$$

Възможна работа на действителните напрежения при възможно изменение на деформациите в обема на крайния елемент е:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \{\delta \varepsilon^e\}^T \cdot \{\sigma^e\} dV = \int_V \{\delta Z^e\}^T [B]^T [D] [B] \{Z^e\} dV = \\ &= \{\delta Z^e\}^T \left(\int_S [B]^T [D] [B] ds \right) \{Z^e\} \end{aligned} \quad (9.22)$$

Въвежда се означението:

$$[k^e] = \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) - \text{матрица на коравина на KE} \quad (9.23)$$

Матрицата на коравина е винаги симетрична, квадратна и детерминантата ѝ е равна на нула. Всеки компонент от нея представлява възлова сила, отговаряща на единично възлово преместване.

Възможна работа на действителните възлови сили при възможно изменение на възловите премествания е:

$$\delta W_{ext} = \{ \delta Z^e \}^T [R^e]. \quad (9.24)$$

Съгласно с принципа на възможната работа имаме:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (9.25)$$

или

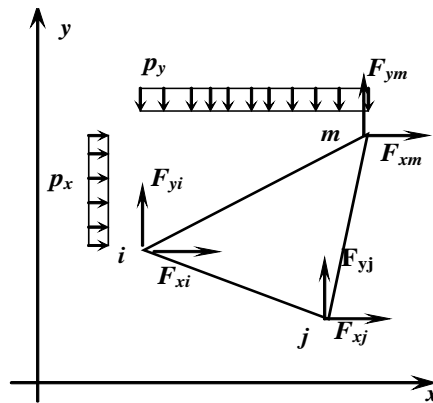
$$\{ \delta Z^e \}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{ Z^e \} = \{ \delta Z^e \}^T \{ R^e \}. \quad (9.26)$$

Тъй като това равенство трябва да е изпълнено за всяко произволно възможно преместване, то можем да запишем следното:

$$\left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{ Z^e \} = \{ R^e \}. \quad (9.27)$$

Възможна работа на външните сили или работата на възловите сили може да бъде получена и на база на външните товари по следния начин:

Нека върху част от свободната повърхност (контур) на разглеждания елемент е приложен разпределен товар, описващ се с вектора $\{ p \}$:



Фигура 9.3 Възлови сили в КЕ.

$\{ p \} = \{ p_x, p_y \}^T$ – вектор на външното въздействие.

Тъй като за основни неизвестни, характеризиращи състоянието на елемента, са избрани преместванията на възлите му, то този товар трябва да се замени със статически еквивалентни възлови сили $\{ F^e \}$.

$\{ F^e \} = \{ F_{ix} F_{iy} F_{jx} F_{jy} F_{mx} F_{my} \}^T$ – вектор на възловите сили.

Работата на външните сили може да се запише както следва:

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} &= \int_S \{ \delta f(x, y)^e \}^T \{ p \} ds = \int_S \{ \delta Z^e \}^T [\Phi]^T \{ p \} ds \\ \delta W_{ext} &= \{ \delta Z^e \}^T \int_S [\Phi]^T \{ p \} ds \\ \{ F^e \} &= \int_S [\Phi]^T \{ p \} ds\end{aligned}\quad (9.28)$$

От принципа на възможните премествания следва:

$$\begin{aligned}\delta U &= \delta W_{ext} \\ \{ \delta Z^e \}^T \left(\int_S [B]^T [D] [B] ds \right) \{ Z^e \} &= \{ \delta Z^e \}^T \int_S [\Phi]^T \{ p \} ds\end{aligned}\quad (9.29)$$

Тъй като това равенство трябва да е изпълнено за всяко произволно, възможно преместване, то можем да запишем:

$$\left(\int_S [B]^T [D] [B] ds \right) \{ Z^e \} = \int_S [\Phi]^T \{ p \} ds.\quad (9.30)$$

От тук следва, че $\{ F^e \} = \{ R^e \}$.

А окончателното условие за равновесие на елемента добива вида:

$$[k^e] \{ Z^e \} = \{ R^e \}.\quad (9.31)$$

Матрица на коравина на елемента

Както беше показано по-горе матрицата на коравина на елемента се получава от израза:

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV.\quad (9.32)$$

При еднороден материал тройното матрично произведение може да се изнесе пред интеграла, тъй като елементите на матрицата на коравина са константи, т.е. не зависи от обема на елемента. Така израз (9.32) добива вида:

$$[k^e] = [B]^T [D] [B] \int_V dV.\quad (9.33)$$

Ако се приеме, че крайният елемент е с постоянна дебелина, ще се получи следното равенство:

$$[k^e] = [B]^T [D] [B] \cdot A^e \cdot t, \quad (9.34)$$

където A^e и t са съответно площта и дебелината на крайния елемент.

Ако умножението на матриците се извърши в символен вид и матрицата на коравина на краен елемент с шест степени на свобода се замести в условието за равновесие (9.27) можем да се запише както следва:

$$\begin{Bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ R_{mx} \\ R_{my} \end{Bmatrix} = D^* \begin{bmatrix} b_i^2 + \bar{\nu}c_i^2 & b_i c_i (v + \bar{\nu}) & b_i b_j + \bar{\nu}c_i c_j & \bar{\nu}b_j c_i + c_i c_j & b_i b_m + \bar{\nu}c_i c_m & \bar{\nu}b_i c_m + c_i c_m \\ c_i^2 + \bar{\nu}b_i^2 & \bar{\nu}b_j c_i + \bar{\nu}b_i c_j & \bar{\nu}b_j b_i + c_i c_j & \bar{\nu}b_j b_i + c_i c_j & \bar{\nu}b_m c_i + \bar{\nu}b_i c_m & \bar{\nu}b_j b_m + c_i c_m \\ b_j^2 + \bar{\nu}c_j^2 & b_j c_j (v + \bar{\nu}) & b_j b_m + \bar{\nu}c_j c_m & \bar{\nu}b_j c_m + \bar{\nu}b_m c_j & b_j b_m + \bar{\nu}c_j c_m & \bar{\nu}b_j c_m + \bar{\nu}b_m c_j \\ c_j^2 + \bar{\nu}b_j^2 & \bar{\nu}b_m c_j + \bar{\nu}b_j c_m & \bar{\nu}b_j b_m + c_j c_m & \bar{\nu}b_j b_m + c_j c_m & \bar{\nu}b_m c_j + \bar{\nu}b_j c_m & \bar{\nu}b_j b_m + c_j c_m \\ b_m^2 + \bar{\nu}c_m^2 & b_m c_m (v + \bar{\nu}) & b_m c_m (v + \bar{\nu}) & b_m c_m (v + \bar{\nu}) & b_m^2 + \bar{\nu}c_m^2 & b_m c_m (v + \bar{\nu}) \\ c_m^2 + \bar{\nu}b_m^2 & & & & c_m^2 + \bar{\nu}b_m^2 & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}, \quad (9.35)$$

където:

$$D^* = \frac{Et}{4A^e(1-\nu^2)}; \bar{\nu} = \frac{1-\nu}{2}. \quad (9.36)$$

В израз (9,35) се виждат стойностите на възловите сили $\{R^e\}$, съответстващи на възловите премествания. Освен това може да се забележи, че матрицата на коравина на елемента има блокова структура със следния вид:

		възел i		възел j		възел m	
		x	y	x	y	x	y
възел i	x	$[k_{ii}]$		$[k_{ij}]$		$[k_{im}]$	
	y	$[k_{ji}]$		$[k_{jj}]$		$[k_{jm}]$	
възел j	x	$[k_{ji}]$		$[k_{jj}]$		$[k_{jm}]$	
	y	$[k_{ji}]$		$[k_{jj}]$		$[k_{jm}]$	
възел m	x	$[k_{mi}]$		$[k_{mj}]$		$[k_{mm}]$	
	y	$[k_{mi}]$		$[k_{mj}]$		$[k_{mm}]$	

Обща система алгебрични уравнения

Описаните до тук процедури са валидни в рамките на всеки един краен елемент. За описание на общото поведение на деформируемото тяло като цяло е необходимо да се състави обща система уравнения. При записването ѝ се достига до съставяне на глобална матрица на коравина. Преди решението е необходимо да се отчетат граничните условия на изследваното тяло. Така се достига до система от линейни уравнения относно основните неизвестни на МКЕ, а именно възловите премествания. Необходимо да бъде изпълнено следното изискване: сумарните възлови сили $\{\bar{R}\}$ в произволен възел i на изследваното тяло, получени от

възловите премествания на всички крайни елементи, контактуващи с възела, да бъдат равни на сумарните възлови сили $\{\bar{F}\}$ във възела, еквивалентни на външния товар, действащ върху тези елементи. Изразено математически това изискване има вида:

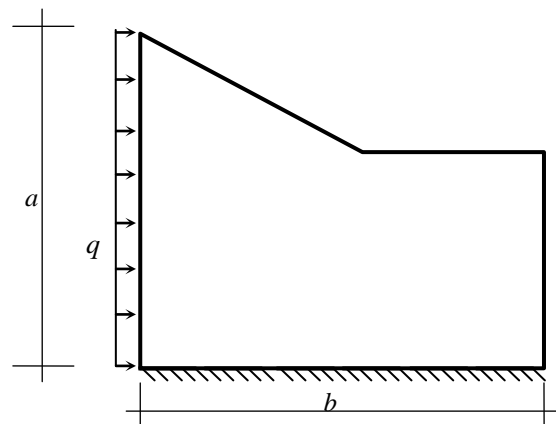
$$\{\bar{F}\} = \{\bar{R}\} \text{ или } [\bar{K}]\{\bar{Z}\} = \{\bar{F}\}. \quad (9.37)$$

Този израз по същество представлява условие за равновесие на изследваното тяло, записано в дискретна форма. След отчитане на подпорните условия, израз (9.37) представлява системата алгебрични уравнения за определяне на вектора $\{\bar{Z}\}$ на възловите премествания на дискретния модел.

Глобалната матрица на коравина на разглежданото тяло $[\bar{K}]$, се формира като предварително се направи дискретен модел и се въведат глобална координатна система и глобална номерация на възлите и елементите. За да стане по-ясна тази процедура тук ще бъде разгледан конкретен пример без това да ограничава общността на процедурата.

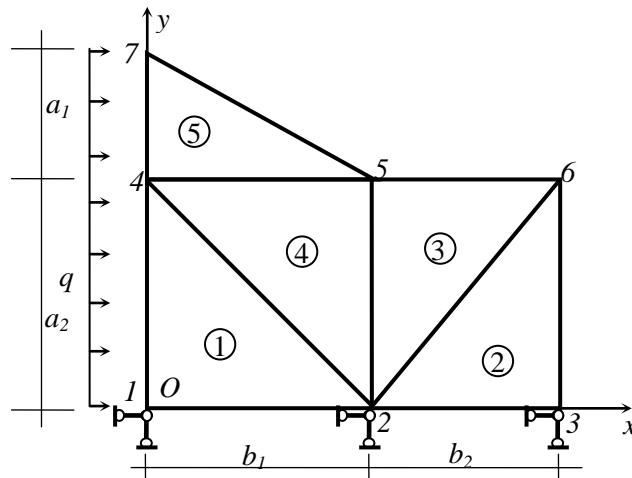
Първоначално, на базата на геометричната форма на изследваното тяло, се прави разделяне на крайни елементи, в случая триъгълни. Изискването е крайните елементи да имат общи възли, в които ще се въведат общите възлови неизвестни – възловите премествания.

Схема на изследваното тяло:



Фигура 9.4 Пример за равнинна задача.

Примерен крайно-елементен модел на изследваното тяло е показан фиг. 9.5.



Фигура 9.5 Крайно-елементен модел.

След моделирането на тялото с крайни елементи следва да се въведе единна номерация на елементите и възлите. Пресмятат се и се записват матриците на коравини на отделните елементи в глобална координатна система и с глобални номера на възлите. Тук ще бъдат записани отделните матрици в символен вид и с глобалните номера на възлите. Записът на номерата на всеки КЕ се извършва по посока обратна на часовниковата стрелка.

Матрица на коравина на елемент 1:

Този елемент има възли с номера 1, 2 и 4. С горен индекс е отбелязан номера на крайният елемент, за да се проследи вместиането му в глобалната матрица на коравина.

$$[k^1] = \begin{bmatrix} [k_{11}^1] & [k_{12}^1] & [k_{14}^1] \\ [k_{21}^1] & [k_{22}^1] & [k_{24}^1] \\ [k_{41}^1] & [k_{42}^1] & [k_{44}^1] \end{bmatrix}$$

Матрица на коравина на елемент 2 с възли с номера 2, 3 и 6:

$$[k^2] = \begin{bmatrix} [k_{22}^2] & [k_{23}^2] & [k_{26}^2] \\ [k_{32}^2] & [k_{33}^2] & [k_{36}^2] \\ [k_{62}^2] & [k_{63}^2] & [k_{66}^2] \end{bmatrix}$$

Матрица на коравина на елемент 3 с възли с номера 2, 6 и 5:

$$[k^3] = \begin{bmatrix} [k_{22}^3] & [k_{26}^3] & [k_{25}^3] \\ [k_{62}^3] & [k_{66}^3] & [k_{65}^3] \\ [k_{52}^3] & [k_{56}^3] & [k_{55}^3] \end{bmatrix}$$

Матрица на коравина на елемент 4 с възли с номера 2, 5 и 4:

$$[k^4] = \begin{bmatrix} [k_{22}^4] & [k_{25}^4] & [k_{24}^4] \\ [k_{52}^4] & [k_{55}^4] & [k_{54}^4] \\ [k_{42}^4] & [k_{45}^4] & [k_{44}^4] \end{bmatrix}$$

Матрица на коравина на елемент 5 с възли с номера 4, 5 и 7:

$$[k^5] = \begin{bmatrix} [k_{44}^5] & [k_{45}^5] & [k_{47}^5] \\ [k_{54}^5] & [k_{55}^5] & [k_{57}^5] \\ [k_{74}^5] & [k_{75}^5] & [k_{77}^5] \end{bmatrix}$$

След записването и пресмятането на елементните матрици на коравина се формира глобалната, следвайки глобалната номерация на възлите. За възлите, които са общи за повече от един краен елемент (възли 2, 4 и 5) съответните подматрици на матриците на коравина от отделните елементи се сумират в глобалната матрица. Тя е с размер $2n$, където n е броят на възлите, в случая $n = 7$. Във всеки възел в конкретния случай има по две степени на свобода – двете възлови премествания.

Глобалната матрица на коравина е квадратна и симетрична. Има ивична структура като ширината на ивицата зависи от начина на номериране на елементите и възлите. По-тъсната ивица позволява по-бърз изчислителен процес. Повечето изчислителни програми имат възможност за оптимизиране на номерацията на възлите и на елементите.

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{12} \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{14} \end{bmatrix}$	0	0	0
2	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_{22}^2 & k_{22}^4 \\ + & + \\ k_{22}^1 & k_{22}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{24} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 1 \\ k_{24} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{25} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 4 \\ k_{25} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{26} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 3 \\ k_{26} \end{bmatrix}$	0
3	0	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{32} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{33} \end{bmatrix}$	0	0	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{36} \end{bmatrix}$	0
4	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{41} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{42} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 4 \\ k_{42} \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{44} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 1 \\ k_{44} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{45} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 5 \\ k_{45} \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{47} \end{bmatrix}$
5	0	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{52} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 4 \\ k_{52} \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{54} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 5 \\ k_{54} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{55} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 3 \\ k_{55} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{56} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{57} \end{bmatrix}$
6	0	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{62} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ k_{62} \end{bmatrix}$ +	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{63} \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{65} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{66} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ k_{66} \end{bmatrix}$ +	0
7	0	0	0	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{74} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{75} \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{77} \end{bmatrix}$

След съставянето на глобалната матрица на коравина се записва глобалният вектор на възловите сили, отговарящ на глобалния вектор на външното натоварване. Пресмятането на тези сили може да се извърши и чрез идеята за посредствено натоварване от строителната статика, вместо с описаните по-горе интегрални. Записът е в глобална координатна система:

$$\{\bar{F}\}^T = \{F_{1x} \ F_{1y} \ F_{2x} \ F_{2y} \ F_{3x} \ F_{3y} \ F_{4x} \ F_{4y} \ F_{5x} \ F_{5y} \ F_{6x} \ F_{6y} \ F_{7x} \ F_{7y}\}^T$$

$$F_{1x} = \frac{q \cdot a_2}{2}; \quad F_{4x} = \frac{q \cdot a_2}{2} + \frac{q \cdot a_1}{2}; \quad F_{7x} = \frac{q \cdot a_1}{2}$$

$$F_{1y} = F_{2x} = F_{2y} = F_{3x} = F_{3y} = F_{4y} = F_{5x} = F_{5y} = F_{6x} = F_{6y} = F_{7y} = 0$$

Последна стъпка преди решението на системата е отчитането на подпорните условия. Това се осъществява като съответното възлово преместване се нулира. Нулирането става като стойностите по главния диагонал на матрицата на коравина в клетките на съответните възли се умножат с много голямо число, например $1 \cdot 10^{30}$. Местата, в които трябва да се умножи с това число в матрицата на коравина са означени със символа „*“. Така при решение на системата, което в

същност става чрез обръщане на матрицата на коравина, съответните премествания получават стойност машинна нула.

Окончателната система линейни уравнения добива вида:

$$[\bar{K}]\{\bar{Z}\} = \{\bar{F}\} \quad (9.38)$$

*	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{11} \end{bmatrix}$		0	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{14} \end{bmatrix}$	0	0	0	\bar{Z}_{1x}	F_{1x}	
0	*							\bar{Z}_{1y}	0	
$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{24} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{25} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{26} \end{bmatrix}$	0	\bar{Z}_{2x}	0	
	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{22} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{24} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{25} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{26} \end{bmatrix}$		\bar{Z}_{2y}	0	
0	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{32} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{33} \end{bmatrix}$	0	0	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{36} \end{bmatrix}$	0	\bar{Z}_{3x}	0	
								\bar{Z}_{3y}	0	
$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{41} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{42} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{42} \end{bmatrix}$	0	*	*	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{45} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{45} \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{47} \end{bmatrix}$	*
				$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{44} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{44} \end{bmatrix}$			\bar{Z}_{4x}	F_{4x}	
								\bar{Z}_{4y}	0	
0	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{52} \end{bmatrix}$		0	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{54} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{55} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{56} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{57} \end{bmatrix}$	\bar{Z}_{5x}	0	
	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{52} \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{54} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ k_{55} \end{bmatrix}$			\bar{Z}_{5y}	0	
0	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{62} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{63} \end{bmatrix}$	0	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{65} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ k_{66} \end{bmatrix}$	0	\bar{Z}_{6x}	0	
	$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{62} \end{bmatrix}$					$\begin{bmatrix} 3 \\ k_{66} \end{bmatrix}$		\bar{Z}_{6y}	0	
0	0	0	0	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{74} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{75} \end{bmatrix}$	0	*	$\begin{bmatrix} 5 \\ k_{77} \end{bmatrix}$	*	
							*	\bar{Z}_{7x}	F_{7x}	
							*	\bar{Z}_{7y}	0	

В конкретния пример е прието запъване на долния контур. Това за равнинната задача означава, че вертикалното и хоризонталното преместване на този контур са нулеви. В модела по крайни елементи нулеви са съответните премествания на възли 1, 2 и 3, следователно в клетки 11, 22, и 33 по главния диагонал на глобалната матрица на коравина трябва да се умножат с голямо число. След нулирането на възловите премествания с помощта на функциите на формата се нулират и преместванията по контура на съответния краен елемент. Във всяка клетка на матрицата, записана в блокова форма, има в същност 4 клетки, две за направление x и две за направление y . При умножението трябва да се

внимава да се умножи точно клетката, отговаряща на направлението на преместването, което трябва да се нулира и то само по главния диагонал.

След решението на системата уравнения (9.38) като резултат се получават стойностите на възловите премествания, а с вече изведените зависимости на теория на еластичността в метода на крайните елементи се получават и стойностите на напреженията и деформациите във възлите и в областта на крайните елементи, а с това и пълното решение на поставената задача.

У с л о в и я з а с х о д и м о с т н а р е ш е н и е т о

Беше изяснено, че в метода на крайните елементи приблизителното представяне на преместванията за цялото тяло се осъществява чрез апроксимирането им в областта на крайния елемент. По тази причина точността на решението зависи от броя на крайните елементи и от вида на приетите за апроксимационни функции. За да се повиши точността трябва да се увеличи броя на крайните елементи в разбивката на изследваното тяло. Апроксимационните функции трябва да отговарят на няколко условия като най-важните от тях са следните:

- ✓ Възможната работа на вътрешните сили за цялото дискретизирано тяло трябва да бъде ограничена по стойност. Тя е сума от възможната работа на вътрешните сили в отделните елементи.

В израза за работата в равнинната задача се съдържат първи производни на функцията на преместванията. В такъв случай апроксимационните функции трябва да притежават поне първи производни, а самите те да са непрекъснати както в областта на крайния елемент така и по границата му.

Крайни елементи, които удовлетворяват това условие се наричат кинематически съвместими. Представеният тук краен елемент е кинематически съвместим. Физически това условие гарантира, че след решение на задачата по контактните линии между два съседни елемента няма да се появи пролука и тялото ще работи като непрекъснато. За да не се появи подобен ефект е недопустимо по границата между два съседни елемента да има междинен възел, който принадлежи само на един от елементите. Всеки възел задължително трябва да бъде общ за всички контактуващи с него елементи.

- ✓ Необходимо е апроксимационните функции да съдържат компоненти, осигуряващи преместването на крайния елемент като идеално твърдо тяло и на тях да съответства нулево напрегнато състояние. Това се осъществява чрез наличието на свободен член във полинома на апроксимационните функции.
- ✓ Необходимо е апроксимационните функции да съдържат компоненти, на които отговарят деформации с постоянна стойност. Това се осъществява като в съответните производни има свободен член.

Тези две условия са условия за пълнота на апроксимационните полиноми. Крайни елементи, които отговарят на условията за кинематическа съвместимост и пълнота се наричат *съгласувани*.

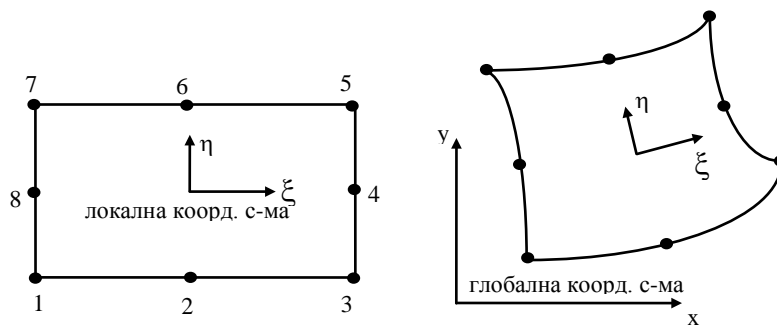
Апроксимационните функции за всеки вид задача се дефинират, съобразявайки се с тези изисквания: двумерна, тримерна или едномерна. Най-удобни за тези случаи се оказват полиномите като пълнотата и степента им се избират в зависимост от конкретната решавана задача и вида на крайния елемент, който се моделира. Така например показаният по-горе елемент е моделиран с двумерни полиноми от първа степен, което отговаря на споменатите изисквания при решаване на задача за равнинно напрегнато или равнинно деформирано състояние.

Друг начин да се повиши точността на решение на задачата, освен със съгъстване на мрежата, е чрез повишаване степента на полинома, което най-лесно се осъществява чрез въвеждането на допълнителни неизвестни в междинни за крайния елемент възли.

Използването на триъгълен краен елемент с 6 степени на свобода в изложения вид води до няколко затруднения. Първо - ниската степен на апроксимация на преместванията, второ - самата форма на елемента не позволява достатъчно добре да бъдат моделирани тела с криволинеен контур. По тези причини са разработени множество разнообразни крайни елементи, всеки от които със своите качества и недостатъци. Тук ще бъде представен на кратко един по-сложен краен елемент, при който гореспоменатите затруднения са преодоляни.

Изопараметричен краен елемент с 16 степени на свобода

Основната идея при моделиране на напрегнатото състояние чрез изопараметрични крайни елементи е да се получат еднакви зависимости между възловите координати и възловите премествания. Това се осъществява като и координатите и преместванията на произволна точка от областта на елемента се изразяват посредством функциите на формата. По този начин се избягва явното пресмятане на обратната матрица на матрицата $[C]$.



Фигура 9.6 Изопараметричен КЕ.

При това разглеждане се въвежда локална координатна система в центъра на елемента с относителните координати ξ и η , изменящи се в интервала $(-1; +1)$.

Средните възли позволяват координатите на елемента да описват криволинеен контур, а за функциите на преместванията да се запише полином от по-висока степен, с което се повишава точността на елемента.

Функциите на формата за правоъгълния елемент са квадратични функции и представени чрез естествените координати $\xi(-1, +1)$ и $\eta(-1, +1)$ са както следва:

$$\Phi_i^e = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), \quad \text{за } i = 1, 3, 5, 7 \quad (9.39)$$

$$\Phi_i^e = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2), \quad \text{за } i = 2, 4, 6, 8 \quad (9.40)$$

където за ξ_i и η_i имаме:

номер на точката	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ_i	-1	0	1	1	1	0	-1	-1
η_i	-1	-1	-1	0	1	1	1	0

Например за страната 1–3, при която $\eta = -1$, за точки 1, 2 и 3 ще получим следните функции на формата:

$$\Phi_1^e(\xi, \eta) = -\frac{\xi}{2}(1 - \xi) \quad (9.41)$$

$$\Phi_2^e(\xi, \eta) = 1 - \xi^2 \quad (9.42)$$

$$\Phi_3^e(\xi, \eta) = \frac{\xi}{2}(1 + \xi) \quad (9.43)$$

Основните апроксимационни зависимости за функциите на преместванията на метода на крайните елементи за равнинната задача имат следният вид:

$$\{u^e\} = [\Phi^e] \{Z^e\}, \quad (9.44)$$

където

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

е векторът на функциите преместванията в границите на един краен елемент;

$$[Z^e] = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6 \ u_7 \ v_7 \ u_8 \ v_8\}^T$$

е векторът на възловите премествания;

$$[\Phi^e] \text{ е матрицата на функциите на формата.}$$

Тази матрица има вида:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 & \Phi_5 & 0 & \Phi_6 & 0 & \Phi_7 & 0 & \Phi_8 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 & \Phi_5 & 0 & \Phi_6 & 0 & \Phi_7 & 0 & \Phi_8 \end{bmatrix}$$

При изопараметричната формулировка на МКЕ координатите x и y в границите на елемента се представят като се използва същата квадратична апроксимация, т.е. същите функции на формата:

$$\{x\} = [\Phi^e] \{X_i\}, \quad (9.45)$$

където

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{Bmatrix}$$

е векторът на функциите координатите в границите на един краен елемент;

$[\Phi^e]$ е матрицата на функциите на формата.

$$[X_i] = \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4 \ x_5 \ y_5 \ x_6 \ y_6 \ x_7 \ y_7 \ x_8 \ y_8\}^T,$$

е векторът на възловите координати.

Функциите на формата са квадратични функции на относителните координати. Например функцията Φ_5 има вида:

$$\Phi_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (9.46)$$

Тя има стойност единица във възел 5, а във всички останали възли има стойност нула.

В р ъ з к а п р е м е с т в а н и я - д е ф о р м а ц и и

Връзката премествания - деформации има следния вид (8.45) :

$$\{\varepsilon^e\} = [B] \{Z^e\}, \quad (9.47)$$

където

$$\{\varepsilon^e\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T,$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_3^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_4^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_5^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_6^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_7^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_8^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_3^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_4^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_5^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_6^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_7^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_8^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3^e}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3^e}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_4^e}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_4^e}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_5^e}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_5^e}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_6^e}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_6^e}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_7^e}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_7^e}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_8^e}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_8^e}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\text{и } [Z^e] = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6 \ u_7 \ v_7 \ u_8 \ v_8\}^T.$$

Производните на функциите на формата по глобалните променливи x и y са както следва:

$$\frac{\partial \Phi_i^e}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (9.48)$$

$$\frac{\partial \Phi_i^e}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (9.49)$$

$i = 1, 2, \dots, 8$

Производните $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}$... могат да се получат чрез обръщането на матрицата на Якоби:

$$[J^e] = [\partial]\{x\} = [\partial][\Phi^e]\{X_i\} \quad (9.50)$$

където

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Обратната матрица на Якоби има вида:

$$[J^e]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}(J^e)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}. \quad (9.51)$$

В р ъ з к а н а п р е ж е н и я - д е ф о р м а ц и и

Функцията на напреженията в областта на елемента се изразява по следния начин:

$$\{\sigma^e\} = [D]\{\varepsilon^e\} = [D][B]\{Z^e\}. \quad (9.52)$$

М а т р и ц а н а к о р а в и н а н а е л е м е н т а

Матрицата на коравина на елемента се получава по същия начин както и за триъгълния краен елемент. Единствената разлика е в броя на възловите параметри, съответно и в размера на матрицата:

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV. \quad (9.53)$$

Ако се извърши интегрирането в относителни координати и дебелината на елемента е $t=const.$, се получава:

$$dV = \det[J^e] t \cdot d\xi d\eta$$

$$[k^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t [B]^T [D] [B] \det[J^e] d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [F] d\xi d\eta \quad (9.54)$$

Матрицата $[F] = t [B]^T [D] [B] \det[J^e]$ не е известна в явен вид и по тази причина се изчислява числено в определен брой точки – Гаусови точки в областта на крайния елемент. По-точното ѝ изчисляване се постига с по-голям брой Гаусови точки.

Следващите математически операции по изчисляване на равнинната задача с този краен елемент не се отличава от вече представеното.

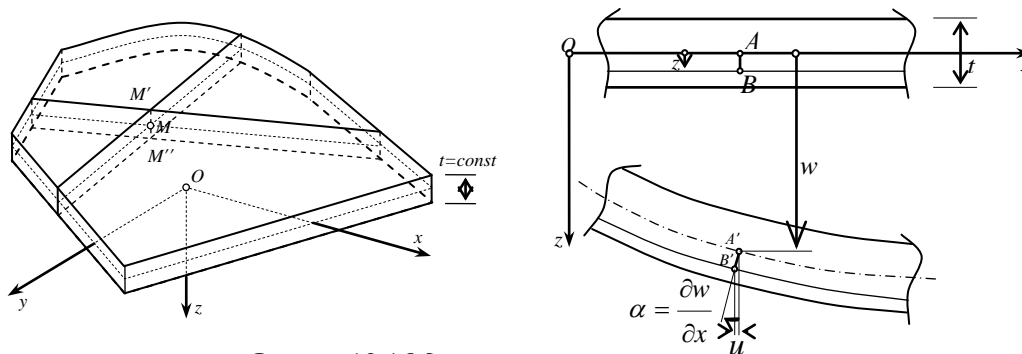
ГЛАВА 10

МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ В ЗАДАЧАТА ЗА ТЪНКИ ПЛОЧИ

За да се моделира една плоча по МКЕ е необходимо да се познават основните характеристики на поведението ѝ, както и основните зависимости между премествания, деформации и напрежения. Тук много на кратко ще бъдат записани основните зависимости и предпоставки на теорията.

О с н о в н и х и п о т е з и :

1. Хипотеза за неразтежимост на средната равнина. Точките от средната равнина получават премествания само по ос z . Ако u_o, v_o и w_o са компонентите на преместването на т. M от средната равнина, то имаме: $u_o=0; v_o=0, w_o=w(x,y)$.
2. Кинематическа хипотеза на Кирхоф – хипотеза за праволинейните нормали. Всяка отсечка с дължина t , перпендикулярна на средната равнината на плочата преди деформацията запазва дължината си t и остава нормална към средната повърхнина, в която е преминала средната равнината след деформацията, т.е. $\varepsilon_z=0; \gamma_{xz}=0; \gamma_{yz}=0$.
3. Статическа хипотеза на Кирхоф – нормалните напрежения на площадките успоредни на средната равнина са пренебрежимо малки, т.е. $\sigma_z=0$.



Фигура 10.1 Модел на плоча.

О с н о в н и з а в и с и м о с т и

Зависимостите между преместванията, премествания – деформации и законът на Хук имат вида:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (10.1)$$

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_x = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10.2)$$

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (10.3)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Разрезните усилия в плочата се определят от изразите:

$$\begin{aligned} M_x &= -D^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= -(1-\nu) D^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

където D^* е цилиндричната коравина: $D^* = \frac{Et^3}{12}$, или в матрична форма:

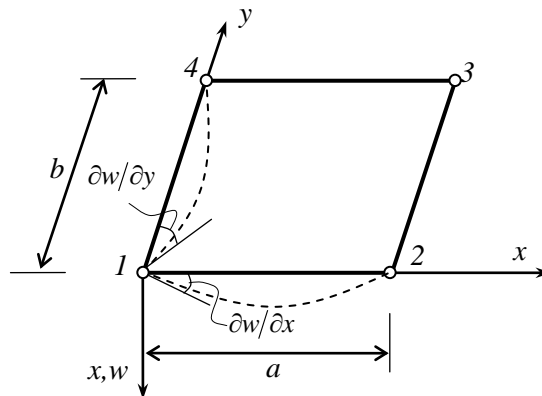
$$\{M\} = -\frac{t^3}{12}[D]\{\partial w\}; \quad [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \{\partial w\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (10.5)$$

От всички описани изрази става ясно, че основното неизвестно, което трябва да се апроксимира съставяйки краен елемент за плоча, трябва да бъде преместването $w(x, y, z)$. От връзката между деформациите и преместванията следва, че избирайки апроксимираща функция за преместването, трябва да се вземе най-малко кубична функция. Освен това съгласно с условията за сходимост на решението по МКЕ, функцията, апроксимираща преместването $w(x, y, z)$, трябва да притежава частни производни от втори ред относно координатите x и y . Самата функция и първите ѝ частни производни да бъдат непрекъснати както във вътрешността на крайния елемент така и по границите му. Тук ще бъде представен един такъв елемент.

Правоъгълен плочов краен елемент с 16 степени на свобода

Този краен елемент (фиг. 10.2) има 4 възела. Във всеки от тях за независими параметри са приети величините:

$$w_i; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_i; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (10.6)$$



Фигура 10.2 Плочов краен елемент.

Ако приемем за краткост означенията:

$$w_{i,x} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i; \quad w_{i,y} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i; \quad w_{i,xy} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_i, \quad (10.7)$$

$i = 1, 2, 3, 4$

то векторът на независимите възлови параметри ще има вида:

$$\{Z^e\}^T = \{w_1 \ w_{1,x} \ w_{1,y} \ w_{1,xy} \ w_2 \ w_{2,x} \ w_{2,y} \ w_{2,xy} \ w_3 \ w_{3,x} \ w_{3,y} \ w_{3,xy} \ w_4 \ w_{4,x} \ w_{4,y} \ w_{4,xy}\}. \quad (10.8)$$

Функцията на преместванията на разглеждания краен елемент се изразява непосредствено чрез възловите параметри и функциите на формата по следния начин:

$$w(x, y) = [\Phi_1(x, y) \Phi_2(x, y) \Phi_3(x, y) \cdots \Phi_{16}(x, y)] \{Z^e\}, \quad (10.9)$$

където функциите $\Phi_1(x, y), \dots, \dots \Phi_{16}(x, y)$ са функциите на формата на двумерния плочов елемент.

Всяка от тези функции се получава като произведение на два едномерни Ермитови полиноми. Тези полиноми физически описват еластичната линия на запънат в двата края прът от единични напречни премествания и завъртания на подпорните му точки. Така функциите на формата (10.9) имат вида:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \bar{\Phi}_1(x) \bar{\Phi}_1(y); \quad \Phi_2(x, y) = \bar{\Phi}_2(x) \bar{\Phi}_1(y); \quad \Phi_3(x, y) = \bar{\Phi}_1(x) \bar{\Phi}_2(y); \quad \Phi_4(x, y) = \bar{\Phi}_2(x) \bar{\Phi}_2(y); \\ \Phi_5(x, y) &= \bar{\Phi}_3(x) \bar{\Phi}_1(y); \quad \Phi_6(x, y) = \bar{\Phi}_4(x) \bar{\Phi}_1(y); \quad \Phi_7(x, y) = \bar{\Phi}_3(x) \bar{\Phi}_2(y); \quad \Phi_8(x, y) = \bar{\Phi}_4(x) \bar{\Phi}_2(y); \\ \Phi_9(x, y) &= \bar{\Phi}_3(x) \bar{\Phi}_3(y); \quad \Phi_{10}(x, y) = \bar{\Phi}_4(x) \bar{\Phi}_3(y); \quad \Phi_{11}(x, y) = \bar{\Phi}_3(x) \bar{\Phi}_4(y); \quad \Phi_{12}(x, y) = \bar{\Phi}_4(x) \bar{\Phi}_4(y); \\ \Phi_{13}(x, y) &= \bar{\Phi}_1(x) \bar{\Phi}_3(y); \quad \Phi_{14}(x, y) = \bar{\Phi}_2(x) \bar{\Phi}_3(y); \quad \Phi_{15}(x, y) = \bar{\Phi}_1(x) \bar{\Phi}_4(y); \quad \Phi_{16}(x, y) = \bar{\Phi}_2(x) \bar{\Phi}_4(y), \end{aligned} \quad (10.10)$$

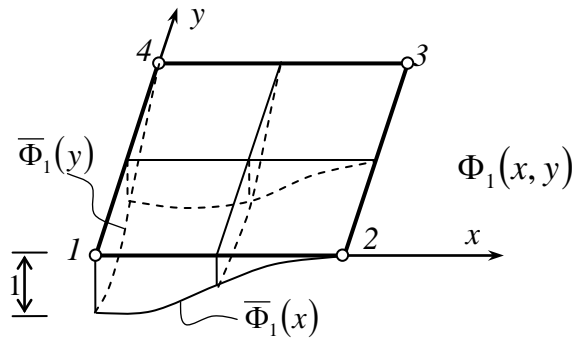
където

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3}; & \bar{\Phi}_2(x) &= x - \frac{2x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}; \\ \bar{\Phi}_3(x) &= \frac{3x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3}; & \bar{\Phi}_4(x) &= -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}; \end{aligned} \quad (10.11)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1(y) &= 1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3}; & \bar{\Phi}_2(y) &= y - \frac{2y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2}; \\ \bar{\Phi}_3(y) &= \frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3}; & \bar{\Phi}_4(y) &= -\frac{y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2}; \end{aligned} \quad (10.12)$$

Графически функцията $\Phi_1(x, y)$ има вида показан на фиг. 10.3:



Фигура 10.3 Функция $\Phi_1(x, y)$.

Останалите функции могат да се изобразят по подобен начин.

Връзката между премествания и деформации дадена с (10.2) добива следния вид:

$$\{\varepsilon^e\} = -z \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1(x)\bar{\Phi}_1(y) & \bar{\Phi}_2(x)\bar{\Phi}_1(y) & \cdots & \bar{\Phi}_2(x)\bar{\Phi}_4(y) \\ \bar{\Phi}_1(x)\bar{\Phi}_1''(y) & \bar{\Phi}_2(x)\bar{\Phi}_1''(y) & \cdots & \bar{\Phi}_2(x)\bar{\Phi}_4''(y) \\ 2\bar{\Phi}_1'(x)\bar{\Phi}_1'(y) & \bar{\Phi}_2'(x)\bar{\Phi}_1'(y) & \cdots & \bar{\Phi}_2'(x)\bar{\Phi}_4''(y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_{1,x} \\ \vdots \\ w_{4,xy} \end{Bmatrix} \quad (10.13)$$

или $\{\varepsilon^e\} = [B]\{Z^e\}$

В този краен елемент всички производни от матрицата $\{\partial w\}$ се приемат като възлови параметри (виж изрази (10.5) и (10.8)). В такъв случай моментите във възлите на елемента се получават от израза:

$$\{M_i^e\} = -\frac{t^3}{12}[D]\{Z^e\}. \quad (10.14)$$

Моментите в областта на елемента се получават от израза:

$$\{M\} = -\frac{t^3}{12}[D][\Phi^e]\{Z^e\}. \quad (10.15)$$

Матрицата на коравина на елемента се получава от същия израз както и в равнинната задача (10.16):

$$[k^e] = \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right). \quad (10.16)$$

Векторът на обобщените възлови сили, съответстващи на равномерно разпределен товар върху крайния елемент, има вида:

$$\{F^e\}^T = q \frac{ab}{4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{6} & \frac{b}{6} & \frac{ab}{36} & 1 & -\frac{a}{6} & \frac{b}{6} & -\frac{ab}{36} & 1 & -\frac{a}{6} & -\frac{b}{6} & \frac{ab}{36} & 1 & \frac{a}{6} & \frac{b}{6} & -\frac{ab}{36} \end{bmatrix}. \quad (10.17)$$

Положителните посоки на компонентите съвпадат с положителните посоки на обобщените възлови сили, отговарящи на възловите параметри.

Удовлетворяване на граничните условия:

Свободно подпирание по ръб успореден на оста x за възел i : $w_i = 0$; $w_{i,x} = 0$;

Свободно подпирание по ръб успореден на оста y за възел i : $w_i = 0$; $w_{i,y} = 0$;

Запъване по ръб успореден на оста x за възел i :

$$w_i = 0; \quad w_{i,x} = 0; \quad w_{i,y} = 0; \quad w_{i,xy} = 0;$$

Запъване по ръб успореден на оста x за възел i :

$$w_i = 0; \quad w_{i,x} = 0; \quad w_{i,y} = 0; \quad w_{i,xy} = 0;$$

Окончателната система алгебрични уравнения се получава по описания в равнинната задача метод и има вида:

$$[\bar{K}]\{\bar{Z}\} = \{\bar{F}\}. \quad (10.18)$$

От системата уравнения (10.18) се получават стойностите на възловите параметри, а чрез тях се изчисляват усилията и деформациите в изследваната плоча.

ГЛАВА 11

ВЪВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЯ НА ПЛАСТИЧНОСТТА

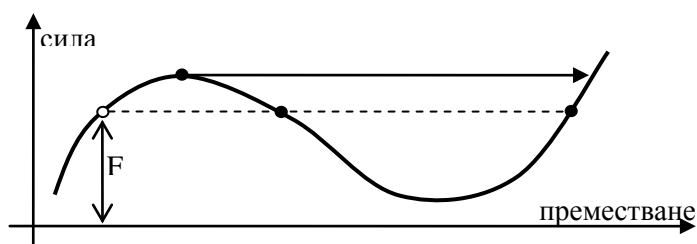
При проектиране на строителните конструкции съществено значение има въпросът за тяхната носимоспособност, която най-често се оценява с максималната стойност на товара, който може да се приложи върху дадена конструкция, без тя да се разруши или да стане негодна за по-нататъшна експлоатация. Носимоспособността на дадена конструкция може да се оцени като последователно се проследи нейното еластично и след това еласто-пластично поведение. За втория етап е необходимо да се използват зависимостите на теория на пластичността, която съвсем на кратко ще бъде разгледана тук. Подробно елементи от теория на пластичността могат да бъдат намерени в [4], [5] и [6], [7] и [8].

В границите на линейно-еластичното поведение на материала връзката напрежение-деформация се описва чрез закона на Хук. След като напрежението в разглежданата точка достигне границата на протичане при дуктилните материали и границата на пластифициране при други материали, материалът развива както еластични, така и пластични деформации.

Линейната теория на еластичността се гради на основата на няколко предпоставки, две от които са следните:

- линейна връзка между премествания и деформации.
- линейна връзка между напрежения и деформации.

В повечето реални задачи, обаче тези две предпоставки не са изпълнени. Неизпълнението им води до нелинейност. В нелинейните задачи за разлика от линейните няма единственост на решението. Така, полученото решение не е обезателно исканото от нас. Характерно поведение на конструкциите с нелинейна зависимост и неединственост на решението е показано на фиг. 11.1:



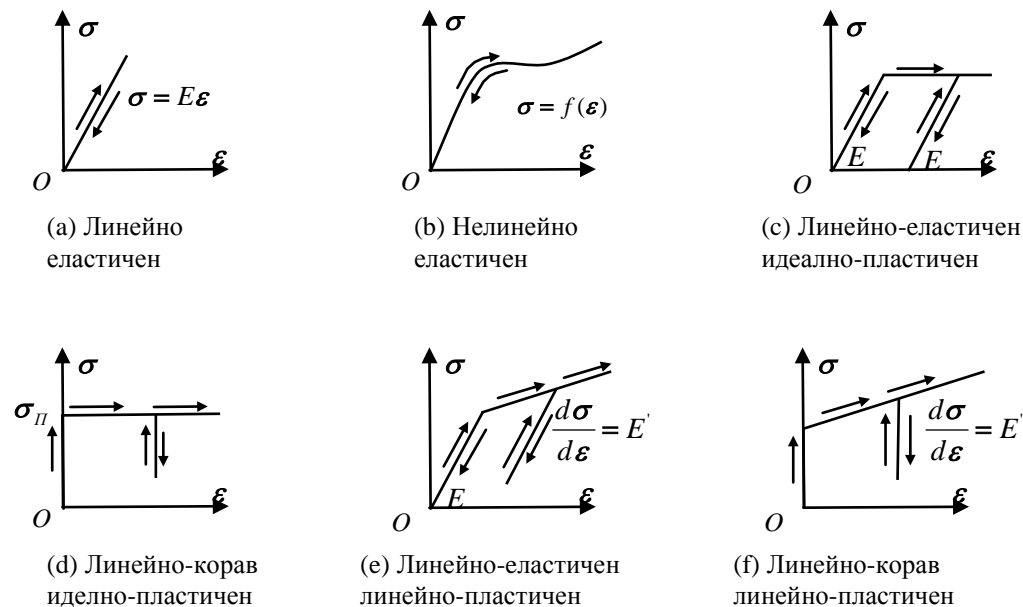
Фигура 11.1 Неединственост на решението.

За да се получи търсеното решение, може да се използват итеративни процедури, но също така трябва да се познава физическата страна на проблема.

При развитието на уравненията на ТП (Теория на пластичността) е необходимо да се приемат редица опростяващи предпоставки. По-долу ще бъдат представени шест, най-често използвани идеализирани работни диаграми напрежение-деформации.

Моделиране на връзката напрежение - деформации

На фиг. 11.2 са представени шест идеализирани диаграми напрежение-деформации.



Фигура 11.2 Модели на работни диаграми в теория на пластичността.

- линейно-еластичен модел (фиг. 11.2(a)): Това е най-простата идеализация. Предполага се, че поведението е линейно-еластично и конститутивният закон се описва адекватно със закона на Хук. В много случаи в проектирането, където напреженията са под границата на пропорционалност на материала, този модел може се прилага успешно;
- нелинейно-еластичен модел (фиг. 11.2(b)): За материали от типа на гумите се оказва, че нелинейно-еластичният модел е много подходящ;
- линейно-еластичен идеално-пластичен модел (фиг. 11.2(c)): Този модел е подходящ за изследване на меки метали, защото линейно-еластичното им поведение е в границите на малки напрежения и след достигане на точката на протичане модулът на еластичните деформации рязко спада до нула, което се моделира добре с идеална пластичност. След започване на пластифицирането пластичните деформации са невъзвращаеми, така че историята на деформирането се моделира добре с този модел.
- линейно-корав идеално-пластичен модел - фиг.11.2(d): Това е допълнително опростяване на предишния модел. Той е подходящ за случаите, където граничното състояние е от особена важност, например при метода на граничното равновесие;

- линейно-еластичен линейно-пластичен модел (фиг. 11.2(е)): Това е модел, който отчита уякчаването, историята на пластифицирането и промяната на граничните стойности на напреженията – особено подходящ за изследване на алуминиеви конструкции;
- линейно-корав линейно-пластичен модел (фиг. 11.2(ф)): Подходящ за случаите, където историята на пластифицирането не е от особена важност.

Ще отбележим, че горните модели са подходящи преди всичко за изследване на идеализирани материали и метали, макар че могат да се използват и за други видове материали.

Т р и м е р н о н а п р е г н а т о с ъ с т о я н и е

Тримерното напрегнато състояние се описва посредством вектора на напреженията, действащи върху въображаемо кубче в околността на разглежданата точка. По аналогичен начин се описва и деформираното състояние в точката. Законът на Хук за случая на изотропен еластичен материал, намиращ се в тримерно напрегнато състояние, се дава с израза:

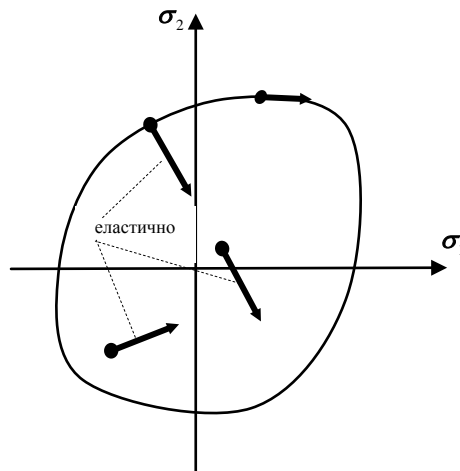
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \lambda_{xy} \\ \lambda_{xz} \\ \lambda_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (11.1)$$

При ротация на кубчето тези напрежения се изменят. При определен ъгъл на ротация тангенциалните напрежения (γ_{xy} , γ_{xz} и γ_{yz}) стават нули, а нормалните напрежения добиват своите максимални стойности. Тези максимални напрежения се наричат главни напрежения, а ориентацията и направлението на напреженията – главни направления.

За целите на теория на пластичността е по-удобно напрегнато състояние да се представя в пространството на главните напрежения.

М о д е л и , б а з и р а н и н а т е о р и я н а п л а с т и ч н о с т т а

Пластичните модели са композирани от три основни компонента – повърхнина на провлачане, закон за уякчаване и закон за пластичното течение. Линейното поведение на материала е ограничено в пространството на напреженията с повърхнината на провлачане.



Фигура 11.3 Повърхнина на провлачане (протичане) за идеално пластичен материал.

Повърхнината на провлачане дефинира множеството от напрегнати състояния, при които материалът започва да протича и се появяват пластични деформации. След достигане на повърхнината на провлачане нарастването на деформациите се разделя на две части – еластична и пластична.

Повърхнината на провлачане (протичане) се дефинира от критериите за пластифициране. Тук ще бъдат разгледани някои от най-известните варианти на такива критерии.

Предварително е необходимо да бъдат дадени определения за сферично и девиаторно напрежение.

При математическото моделиране е уместно декомпозирането на тензора напрежение на две части, наречени сферичен или хидростатичен тензор и девиаторен тензор на напреженията.

Сферичният тензор на напреженията е тензорът чиито елементи се изразяват чрез средното напрежение p :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1. \quad (11.2)$$

От (11.2) става ясно, че p е едно и също при всяка координатна система, доколкото I_1 е инварианта на напреженията. По тази причина този тензор се свързва с хидростатично налягане.

Девиаторният тензор се дефинира най-просто чрез разликата на тензора напрежение и сферичния тензор:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - p) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - p) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - p) \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Това подпомага формирането на критериите за пластифициране.

1. Критерии за пластифициране

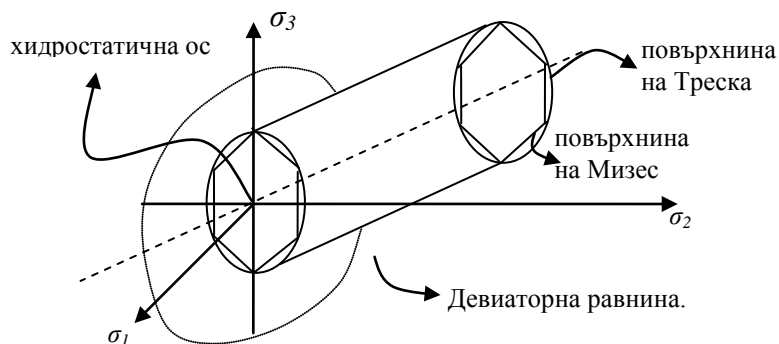
За нагледност критериите за пластифициране се изобразяват в пространството на главните напрежения. Това е удобно, защото тези критерии всъщност представляват уравнения на познати геометрични фигури. В пространството на главните напрежения хидростатичното напрежение се изобразява като ос – права линия, а девиаторното напрежение представлява равнина, наречена девиаторна равнина.

–Критерий на Треска

За някои материали, като металите, се приема, че протичането не зависи от хидростатичната част на напреженията. В този случай един широко приет критерий е този, според който протичането настъпва когато максималните срязващи напрежения достигат якостта на срязване. Така е формулиран критерия на Треска. Математически той се записва по следния начин:

$$\max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) = \sigma_y. \quad (11.2)$$

Очевидно е, че според този критерий хидростатичната част от напрегнатото състояние не оказва влияние на пластифицирането, защото при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ с горния израз се получава $\tau_{\max} = 0$. Дали материалът ще се пластифицира зависи само от девиаторната част на напрегнатото състояние. Повърхнината на провлачане в този случай е правилна шестоъгълна призма с централна ос, съвпадаща с хидростатичната ос и е показана на фиг. 11.4. За всяка околна стена от призмата максималното и минималното главно напрежение зависят линейно едно от друго.



Фигура 11.4 Критерии за пластифициране за тримерната задача.

– Критерий на von Mises (фон Мизес)

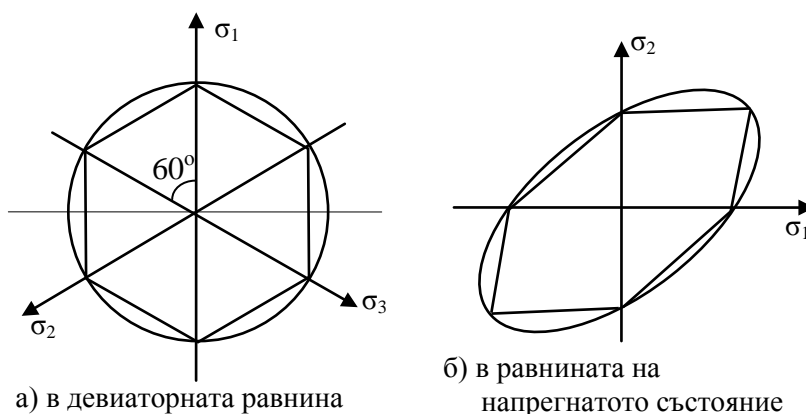
Според този критерий пластифицирането зависи от трите главни напрежения и то настъпва когато дължината на девиаторният вектор в

пространството на главните напрежения, достигне определена критична стойност. Записано чрез на главните напрежения изразът добива вида:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6\sigma_y^2 = 0 \quad (11.3)$$

Критерият на фон Мизес също е независим от хидростатичното напрежение и освен това не се влияе от ъгъла на девиаторната равнина. Повърхнината на протичане по този критерий в пространството на главните напрежения е цилиндър с ос съпадаща с хидростатичната ос.

За случая на двумерно напрегнато състояние и в равнината на девиаторната равнина двата критерия имат вида –фиг. 11.5:



а) в девиаторната равнина
б) в равнината на напрегнатото състояние

Фигура 11.5 Изображение на критериите в различните равнини

Представените два критерия са най-често използвани за хомогенни материали. За по-сложни материали като бетон например пластифицирането зависи от хидростатичната компонента на напреженията. Освен това напрежението зависи от ъгъла на девиаторната равнина. При изследване на стоманобетонни конструкции пукнатинообразуването и пластифицирането на армировката оказват голямо влияние на реагирането. Често използвани критерии са тези на Мор-Кулон и Друкер-Прагер. И двата критерия отчитат чрез линейна зависимост влиянието на хидростатичното напрежение, което е резонно когато пукнатинообразуването не се третира от модела.

– Критерий на Mohr – Coulomb (Мор-Кулон)

Този критерий е доразвитие на критерия на Треска. Той се дефинира като права линия в равнината на окръжността на Мор и е функция само на максималното и минималното напрежение.

Повърхнината на пластифициране се определят от кохезията на материала C и от ъгъла на вътрешно триене φ . За случая на материали с ъгъл на вътрешно триене $\varphi = 0$ критерият на Мор-Кулон съвпада с критерият на Треска. Критерият на Mohr – Coulomb се записва във вида:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \phi = c - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \sin^2 \phi \right]^{1/2} \tan \phi. \quad (11.4)$$

В пространството на главните напрежения критерият на Мор-Кулон представлява правилна шестоъгълна пирамида с център оста, която съвпада с хидростатичната ос.

– Критерий на Друкер-Прагер

Този критерий е доразвитие на критерия на фон Мизес и се записва във вида:

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - \sigma_y = 0. \quad (11.5)$$

В пространството на главните напрежения този критерий се описва от правилен конус с ос хидростатичната ос.

Доказано е, че критерият на Мор-Кулон дава по-добро съвпадение с експерименталните резултати в девиаторната равнина, но критерият на Друкер-Прагер описва по-добре равнинното напрегнато състояние на бетона.

2. Закон на уякчаване

Законът за уякчаване определя как повърхнината на протичане се променя при нарастване на пластичните деформации.

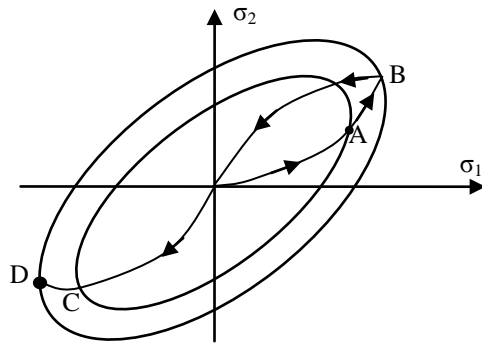
След достигане на повърхнината на протичане деформациите се разделят на две части – еластична и пластична. От работната диаграма на някои материали показва, че в някои случаи, въпреки пластифицирането напреженията продължават да растат. Това поведение се нарича „уякчаване“. В други случаи, при увеличаване на натоварването се появява намаляване на напреженията. Това явление се нарича „омекване“.

По-общо явлението уякчаване в теория на пластичността се моделира като промяна на повърхнината на провлачане с нарастването на пластичните деформации. Това се дефинира като функция, зависещи от напрежението σ , пластичната деформация ε_p и един параметър, наречен параметър на уякчаване k :

$$f(\sigma, \varepsilon_p, k) = 0 \quad (11.6)$$

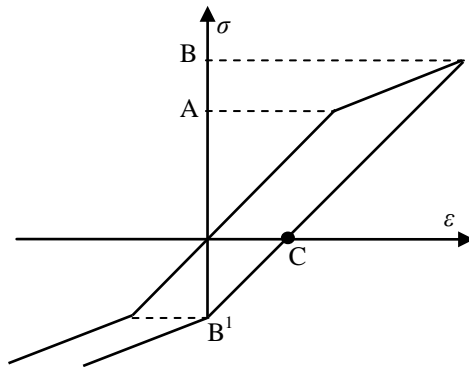
Най-използваните закони за уякчаване са изотропното, кинематичното и комбинация от двете.

При изотропното уякчаване повърхнината на протичане се увеличава равномерно (изотропно), показано на фиг. 11.6:



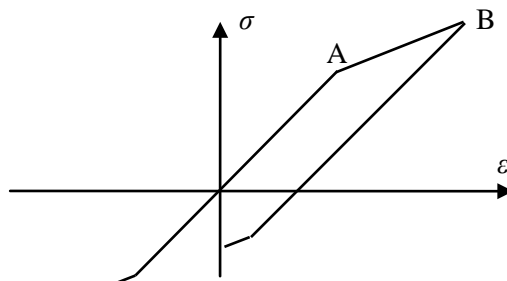
Фигура 11.6 Изотропно уякчаване.

За случая на едномерно напрегнато състояние това има вида:



Фигура 11.7 Едномерно напрегнато състояние.

Законът за изотропно уякчаване е прост, но не отчита ефекта на Баушингер, който е характерен за много материали. Ефектът на Баушингер се дефинира по следния начин. При натоварване на опън с поява на пластични деформации и последващо разтоварване и натоварване на натиск, границата на провлачане намалява. Това явление се отчита от закона за кинематично уякчаване. Съгласно този закон повърхнината на протичане се транслира в пространството на напреженията без да се завърта и променя. За случая на едномерно напрегнато състояние този закон изглежда по следния начин – фиг. 12.8:



Фигура 11.8 Закона за кинематично уякчаване.

За реални материали, като бетон, следващите повърхнини на провлачане не само че се транслират, но се и завъртат и променят по размер и форма. На практика обаче, за случая на монотонно натоварване ефектът на Баушингер няма значение и е достатъчно да се избере прост закон за уякчаване като изотропния.

3. Закон за пластичното течение.

Законът за пластичното течение дава изменението и развитието на пластичните деформации, т. е. дава инкременталната зависимост напрежения-деформации за уякчаване на материал.

Когато повърхнината на протичане се достигне за първи път векторът на деформациите се разделя на две части $\{\varepsilon_e\}$ и $\{\varepsilon_p\}$. Тъй като еласто-пластичното реагиране е нелинейно по своята същност, то не съществува единствена зависимост между напрегнатото състояние и съответстващото му деформирано състояние. Тази зависимост е подчинена на историята на натоварването. За да следва нелинейното реагиране се прилага постъпкова процедура. Нарастването на деформациите $\Delta\{\varepsilon\}$ се разделя на две части $\Delta\{\varepsilon_e\}$ и $\Delta\{\varepsilon_p\}$:

$$\Delta\{\varepsilon\} = \Delta\{\varepsilon_e\} + \Delta\{\varepsilon_p\} . \quad (11.7)$$

Еластичната част на нарастването е свързана чрез закона на Хук с нарастването на напреженията:

$$\Delta\{\varepsilon_e\} = [D]^{-1} \cdot \Delta\{\sigma\} . \quad (11.8)$$

Пластичната част на нарастването е функция на нарастването на напреженията $\Delta\{\sigma\}$, както и на самите напрежения $\{\sigma\}$ и деформации $\{\varepsilon_p\}$ в дадената точка, така и на историята на натоварването:

$$\Delta\{\varepsilon_p\} = f\left(\Delta\{\sigma\}, \{\sigma\}, \{\varepsilon_p\}, k\right) . \quad (11.9)$$

Ако достигнатото напрегнато състояние лежи на последната формирана повърхнина на провлачане в пространството на напреженията, то функцията, формираща нарастването на вектора на пластичните деформации се определят на базата на закона за пластичното течение. Ако достигнатото напрегнато състояние лежи вътре в повърхнината на провлачане, то се е проявило разтоварване и реагирането е еластично, тоест: $\{\varepsilon_p\} = 0$.

Най-често се приема, че направлението на прилагане на пластичната деформация (в пространството на деформациите) съвпада с направлението на нормалата към актуалната повърхнина на провлачане за достигнатото напрегнато

състояние (в пространството на напреженията). В този случа законът за пластичното течение се нарича „асоциативен”. За да се приеме асоциативен закон за пластичното течение, трябва да се осигури, че няма промяна в обема на изследваното тяло, което е вярно в масовия случай.

Решението на конкретна задача в затворен вид (аналитично решение) с методите на теория на пластичността се отдава в изключително редки случаи и за ограничен клас задачи. По правило се използват числени методи, най-вече методът на крайните елементи (МКЕ). Това е сложна задача и изисква прилагането на специални алгоритми за решаване на нелинейната система алгебрични уравнения, които се получават в резултат на приложението на числените методи.

Ф и з и ч е с к и н е л и н е й н а п о с т а н о в к а н а М К Е з а с т о м а н о б е т о н

През миналия век започва развитието на пакети приложни програми по МКЕ, като в началото тези програми имали академичен характер, след което придобиват комерсиални измерения. Едни от най-известните пакети са например: ANSYS, ABAQUS, DIANA.

В тази глава са дадени само някои най-важни сведения и уравнения за приложението на МКЕ при решаването на еластопластичната задача.

Математически погледнато проблемът за физическа нелинейност е следствие на факта, че в уравнението $\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$ материалната матрица $[D]$ е функция на напреженията. Поради тази причина системата уравнения:

$$\{R\}=[K]\{Z\}, \quad (11.12)$$

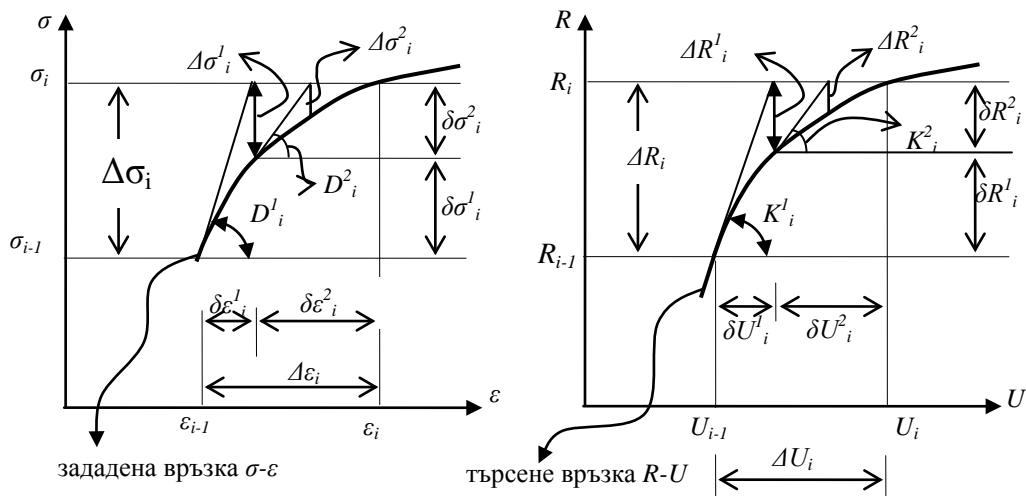
е нелинейна и възниква проблем за численото ѝ решение. За да може проблемът да бъде решен, е необходимо да бъдат зададени конститутивни зависимости за материала. Това са зависимости, които определят елементите на материалната матрица, като функция на напреженията.

Съществуват различни методи за числено решаване на нелинейните проблеми с метода на крайните елементи. Като най-подходящи при задачи, в които физическите характеристики зависят от историята на натоварването, се препоръчва процедура с прилагане на натоварването на достатъчно малки стъпки и итерационни цикли до удовлетворяването на уравненията за равновесие и уравненията за непрекъснатост на деформациите за всяка стъпка от решението.

Две различни процедури се препоръчват при решаване на физически нелинейни проблеми с метода на крайните елементи. Това са тангенциалните методи и методите на „началното натоварване”. При втория метод промяната на коравината на конструкцията се симулира с корекция чрез „фиктивни” или „начални” сили във вектора на натоварването. Тези фиктивни сили отчитат влиянието на нееластичните деформации на материалите, като матрицата на коравина се формира само веднъж на базата на еластичните характеристики на материалите. Този метод е доста икономичен по отношение на компютърно време, но не е подходящ за решаване на задачи при знакопроменливо натоварване. Тангенциалните методи в най-различни техни разновидности се оказват много по-

подходящи в тези случаи. Една от най-известните техники е да се изменя матрицата на коравина на всяка стъпка на натоварване (или през определен брой стъпки), докато по време на итерациите за удовлетворяване на уравненията за равновесие и условията за непрекъснатост на деформациите матрицата на коравина остава постоянна. Тази апроксимация се нарича „модифициран метод на Нютон-Рафсон“.

Друга вариация на метода е да се променя матрицата на коравина на всяка стъпка на натоварване и на всяка итерация за удовлетворяване на уравненията за равновесие и условията за непрекъснатост на деформациите. Тази модификация се нарича „пълнен метод на Нютон-Рафсон“.



Фигура 11.9 Пълнен метод на Нютон-Рафсон.

Процедурата за решаване на нелинейни задачи с пълния метод на Нютон-Рафсон може да се систематизира по следния начин – фиг.11.9.

За всяка стъпка i на прилагане на натоварването се извършва следното:

- 1) Задава се нарастване на натоварването $[\Delta R_i]$ и се решава линейната система уравнения с получената на предишната стъпка матрица на коравина $[K_i^{(1)}]$.

$$\{\Delta R\}_c = [K^1]_i \cdot \{\delta U^1\}_i \quad (11.10)$$

- 2) Получава се нарастване на преместванията се изчислява нарастването на деформацията $\{\delta \varepsilon^1\}$ според израза:

$$\{\delta \varepsilon^1\} = [B] \{\delta U^1\}_i \quad (11.11)$$

- 3) С получената на предишната стъпка матрицата $[D]_i$ се получава предположеното увеличение на напреженията $\Delta\{\sigma\}_i$ при предпоставката за тяхното линейно изменение в разглеждания интервал.

$$\{\Delta\sigma\}_i = [D]_i \{\delta\varepsilon^1\}_i$$

- 4) От конститутивните зависимости за материала се получават точните стойности на нарастванията на напреженията:

$$\{\delta\sigma^1\}_i = \{\sigma\}_{i-1} + \left\{ \delta\sigma \left(\{\delta\varepsilon^1\}_i \right) \right\}_i \quad (11.12)$$

- 5) Изчислява се разликата между предположените и истинските стойности на нарастването на напреженията:

$$\{\Delta\sigma_r^1\}_i = \{\Delta\sigma\}_i - \{\delta\sigma^1\}_i \quad (11.13)$$

- 6) Изчисляват се неуравновесените сили за елемента:

$$\{\Delta R_i^1\}_i = \int [B]^T \{\Delta\sigma_i^1\}_i dx \quad (11.14)$$

Тези неуравновесени възлови сили се асемблират в глобалния вектор на неуравновесените сили $\{\Delta R^1\}_i$.

- 7) От конститутивните зависимости се изчисляват матрицата $[D^2]_i$, след това се изчислява матрицата на коравина $[K^2]_i$ за всеки елемент:

$$[K^2]_i = \int [D^2]_i^T [B] [D^2]_i dx \quad (11.15)$$

Асемблира се глобалната матрица на коравина $[K^2]_i$.

- 8) Полага се:

$$\{\Delta R_i\} = \{\Delta R^1\}_i \quad (11.16)$$

- 9) Стъпки от (1) до (8) се повтарят до получаване норма на вектора $\{\Delta R\}_i$ по-малка от някаква предварително зададена стойност ε :

$$\|\{\Delta R\}_i\| \leq \varepsilon.$$

Окончателните стойности на нарастванията на деформациите и преместванията за дадена стъпка на натоварване се получават според изразите:

$$\{\Delta \varepsilon_i\}_i = \sum_j \{\delta \varepsilon^j\}_i \quad (11.17)$$

$$\{\Delta U\}_i = \sum_j \{\delta U^j\}_i \quad (11.18)$$

10) Премавна се към нова стъпка на натоварване.

Следвайки тази процедура при стъпково натоварване се симулира цялостното решение на задачата като се гарантира единственост на решението.

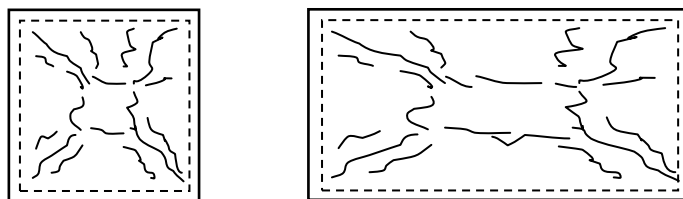
Метод на граничното равновесие за плочи

Методът на граничното равновесие се разглежда въз основа на предпоставката, че конструкциите са от твърдопластичен материал, тоест когато напрежението е по-малко от граничното няма деформации, а при достигане на граничното напрежение деформациите нарастват неограничено и остават неопределени. Съгласно с изложеното по-горе и при предпоставката, че се работи с обобщени усилия, а не с напрежения, критерият за достигане на гранично състояние за плочи от идеално твърдопластичен материал може да се запише във вида:

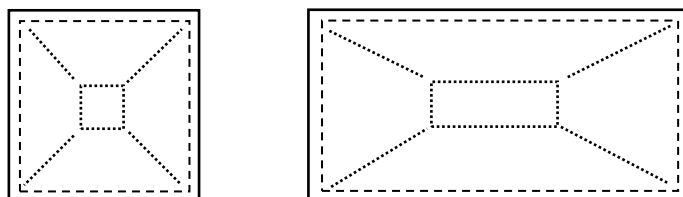
$$f(\sigma_1, \sigma_2) \leq 0, \quad (11.19)$$

където функцията f представлява изпъкнала затворена крива в пространството на главните напрежения. Повече информация за метода на граничното равновесие и теория на пластичността може да бъде намерена в [6] и [7].

Поради наличие на трудности при решението на конкретни практически задачи с този подход се прибегва до ползването на приблизителни модели и методи. Един такъв модел е моделът с пластични линии, намиращ широко приложение в практиката и именно той ще бъде изложен тук – фиг. 11.11:



Пластични линии, получени от експеримент.



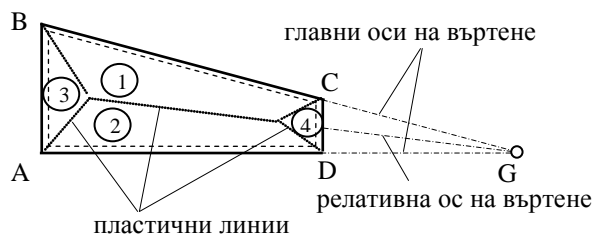
Изчислителен модел на пластични линии.

Фигура 11.10 Модели с пластични линии.

Резултатите от проведени многобройни реални експерименти на стоманобетонени плочи показват, че при разрушаването си плочите се разделят на отделни части, ограничени от приблизително прави линии – зони на разрушение. Тези линии са аналог на пластичните стави, образуващи се при греди, натоварени на огъване до достигане на гранични товари. При по нататъшното изложение ще бъде прието, че се изследват стоманобетонени плочи. В този смисъл, в местата на образуване на пластични линии действат огъващи моменти, които зависят от армировката на плочата и се определят според предписанията на теорията на стоманобетона.

Частите, на които се разделя плочата от пластичните линии, се приемат за безкрайно корави. При тези условия настъпването на състояние – гранично равновесие се формулира по следния начин: *когато са се образували достатъчен брой пластични линии, така че отделните части на плочата могат взаимно да се завъртат, се казва, че е настъпило гранично състояние, а съответстващия на това състояние товар се нарича граничен.*

Линиите, около които отделните корави части могат да се завъртат се наричат оси на въртене. За оси на въртене служат както образуваните пластични линии, така и опорните цилиндрични стави на плочата. При предпоставката, че механизмът на въртене на плочата е равнинен (при пренебрегване дебелината на плочата) могат да се формулират някои правила – фиг.11.11:



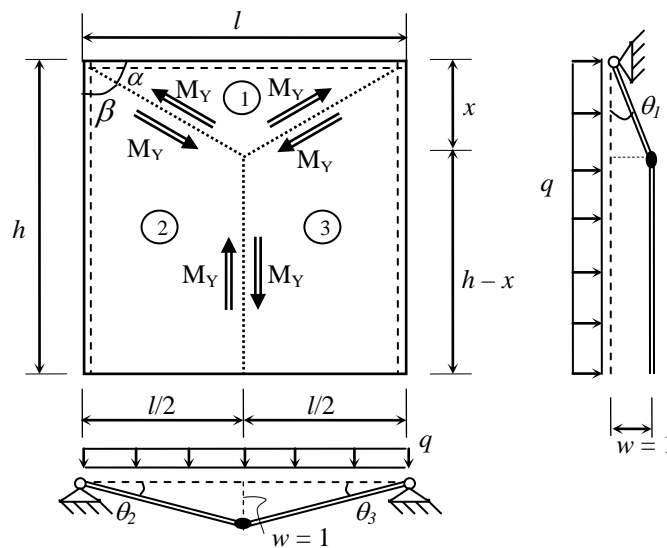
Фигура 11.11 Оси на въртене при плоча.

- главните оси на въртене на два диска (конструктивните опорни цилиндрични стави) и релативната им ос (пластичната линия) се пресичат в една точка;
- релативните оси на въртене на три диска се пресичат в една точка;
- при плоча подпряна в определени точки с колони, осите на въртене минават през тези точки, като се спазват и горните две правила.
- Всеки механизъм на разрушаване на дадена плоча трябва да може да се зададе с един параметър, т.е. да бъде система с една степен на свобода.

Така се достига до идеята за кинематически подход за определяне на механизма на разрушение на плочи.

Кинематически метод за определяне на граничните товари

Този метод се основава на кинематическата теорема, според която товарът, съответстващ на даден възможен механизъм на разрушение, е равен или по-голям от граничния.



Фигура 11.12 Пластични огъващи моменти M_y .

За определяне на стойността на товара, която съответства на даден възможен механизъм се използва принципа на възможните премествания. В дадена пластична линия има граничен огъващ момент с интензивност M_y . Съответният диск се завърта на ъгъл θ .

Работата на вътрешните сили е (фиг. 11.12):

$$W_{\text{int}} = M_y l \theta \cos \alpha, \quad (11.20)$$

В израз (11.20) l е дължината на участъка от пластичната линия, върху който действа въпросният огъващ момент. Ако се използват проекциите на векторите на пластичните моменти и завъртанията върху координатните оси x и y , израз (11.20) може да се запише във вида:

$$W_{\text{int}} = (M_{Y,x} \theta_x + M_{Y,y} \theta_y) \cdot l. \quad (11.21)$$

Ако приемем, че плочата е натоварена с равномерно разпределен по площта си товар, то работата на външните сили ще бъде:

$$W_{\text{ext}} = \iint q w dx dy, \quad (11.22)$$

където $w = w(x, y)$ са вертикалните премествания на средната равнина на плочата. Тези премествания зависят от механизма на разрушение. Според принципа на възможните премества имаме:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \quad (11.23)$$

или:

$$\sum (M_{Y,x} \theta_x + M_{Y,y} \theta_y) \cdot l = \iint q w dx dy. \quad (11.24)$$

От този израз се определя стойността на граничния товар.

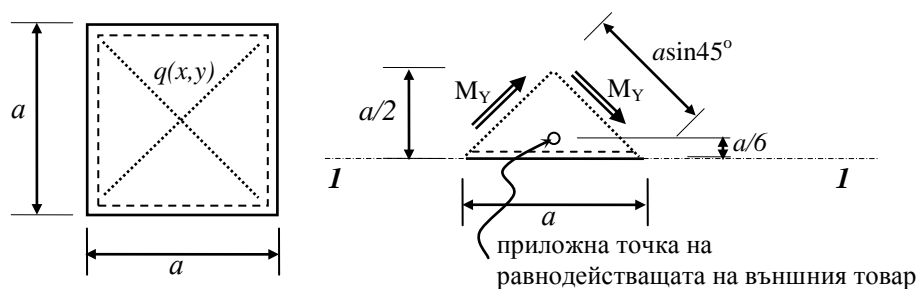
Статически метод за определяне на граничните товари

Чрез статическия метод се получава долната граница на граничния товар. В общия случай използването на този метод е свързано с повече трудности, отколкото използването на кинематичния. Този метод е сравнително лесен само в случаите на плочи с правилна геометрия и просто натоварване.

Идеята на метода най-общо казано е следната: приема се определен кинематически съвместим механизъм на разрушение, след което за всеки диск от плочата се записват условия за равновесие. За илюстрация на метода ще бъде разгледан един пример.

Ставно подпряна по контура квадратна плоча натоварена с равномерно разпределен товар. Търси се стойността на граничния товар.

Приема се механизъм на разрушение, състоящ се от четири линии на разрушение по диагоналите на плочата както е показано на фиг. 11.13:



Фигура 11.13 Възможен механизъм на разрушение.

За един отделен триъгълник се записват условия за равновесие както следва:

$$\sum M_{I-I} = 0: \quad 2(M_Y \cos 45^\circ \cdot a \cdot \sin 45^\circ) = \frac{qa^2}{4} \frac{a}{6}. \quad (11.28)$$

От този израз се получава:

$$q_U = \frac{24}{a^2} M_Y. \quad (11.29)$$

Така видимо много лесно се получава стойността на граничния товар, но съществуват няколко неудобства. Както беше споменато по-горе този метод е приложим само за плочи с проста геометрия. Освен това, ползвайки този метод трябва предварително да ни бъде известен механизъм на разрушение. При положение, че съществуват повече от един възможен механизъм за дадена плоча, няма гаранция дали сме избрали меродавния, а от там и получената стойност на натоварването, дали е най-малката възможна. По тези причини става ясно, че е необходимо съвместно използване на кинематичния и статичния метод. Чрез кинематичния метод се получават възможните механизми на разрушение и горна граница на граничния товар, а чрез статичния – долна граница на граничното натоварване при избран механизъм на разрушение.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА:

- [1] **Върбанов, Х., А. Тепавичаров, Т. Ганев** “Приложна теория на еластичността и пластичността”, Техника, София, 1992.
- [2] **Върбанов Хр.** „Теория на еластичността”, Техника, София, 1976
- [3] **Банков Б., Ю. Павлова** „Метод на крайните елементи в строителната механика”, УАСГ, 1996г.
- [4] **Господинов Г., И. Керелезова** „Въведение в теория на пластичността”, електронен учебник, УАСГ, 2004г., http://uacg.bg/filebank/att_1306.pdf
- [5] **Господинов Г.** „Механика на разрушението”, електронен учебник, УАСГ, 2003г., http://uacg.bg/filebank/att_5281.pdf
- [6] **Ганев Т.** „Метод на граничното равновесие – цикъл лекции“, София, УАСГ, 2002
- [7] **Тодоров Г.** „Изследване на прътови конструкции при пластични деформации“, ISBN 978-954-724-056-8, УАСГ 2013
- [8] **Nielsen M.P., Hoang L. C.**, Limit analysis and concrete plasticity – third edition, CRC Press, LLC, 2011