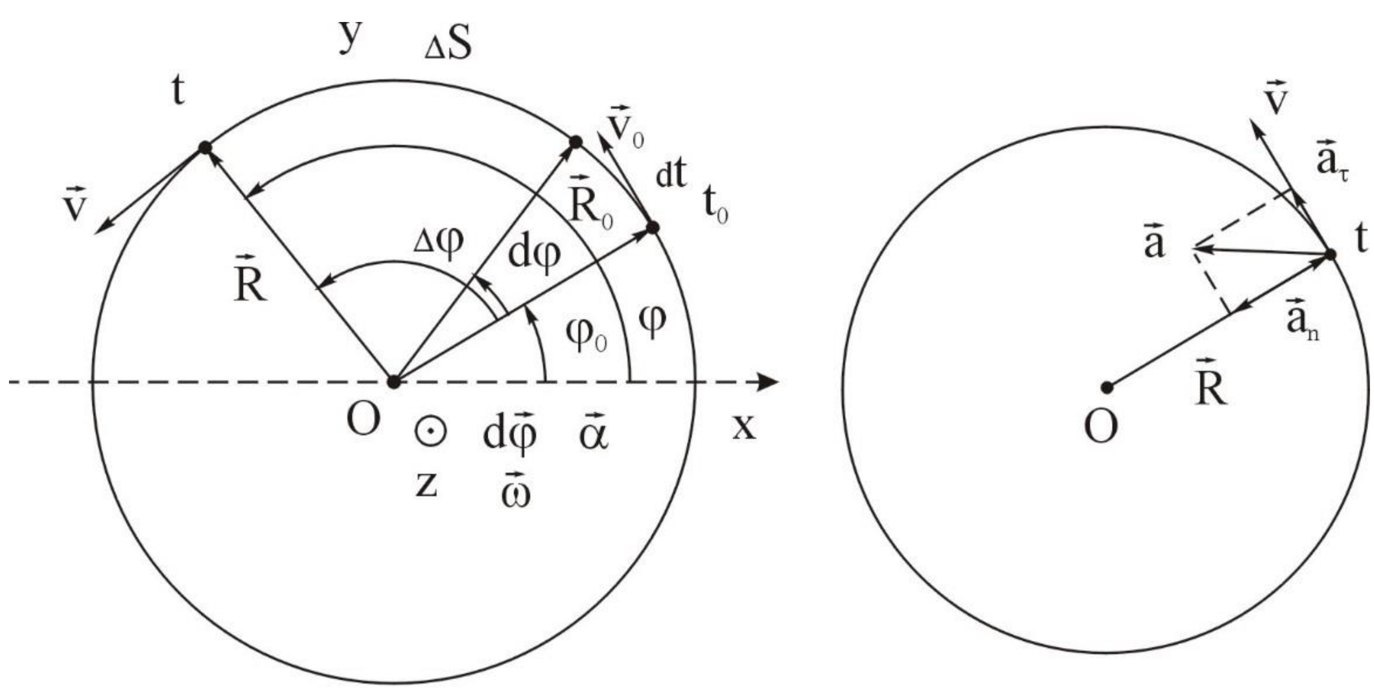
Въпрос 2.
Движение по окръжност. Равномерно движение по окръжност.

1. **Дефиниция.**

Движение на материална точка по траектория, която е окръжност, се нарича движение по окръжност.

2. Величини, които характеризират това движение

Избираме отправна координатна система с център в центъра на окръжността и ос 0z, перпендикулярна на равнината й. Радиус-векторът **R** на материалната точка винаги има големина, равна на радиуса R на окръжността.



а) **Позиционен ъгъл.**

Положението на материалната точка по окръжността във всеки един момент време t се определя от ъгъла φ , който радиус-векторът сключва с посоката на оста Ох. Този ъгъл винаги се отчита в директна посока (обратна на часовниковата стрелка), измерва се в радиани [rad] и се нарича позиционен ъгъл.

Позиционният ъгъл се разглежда като векторна величина $\vec{\varphi}$ с посока, съвпадаща винаги с посоката на оста Oz. Такива вектори, чието направление е свързано с дадена ос, се наричат още аксиални (осеви) вектори. Когато материалната точка се движи, позиционният ѝ ъгъл се изменя с времето. Зависимостта:

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$$

се разглежда като закон за движението в разглеждания случай.

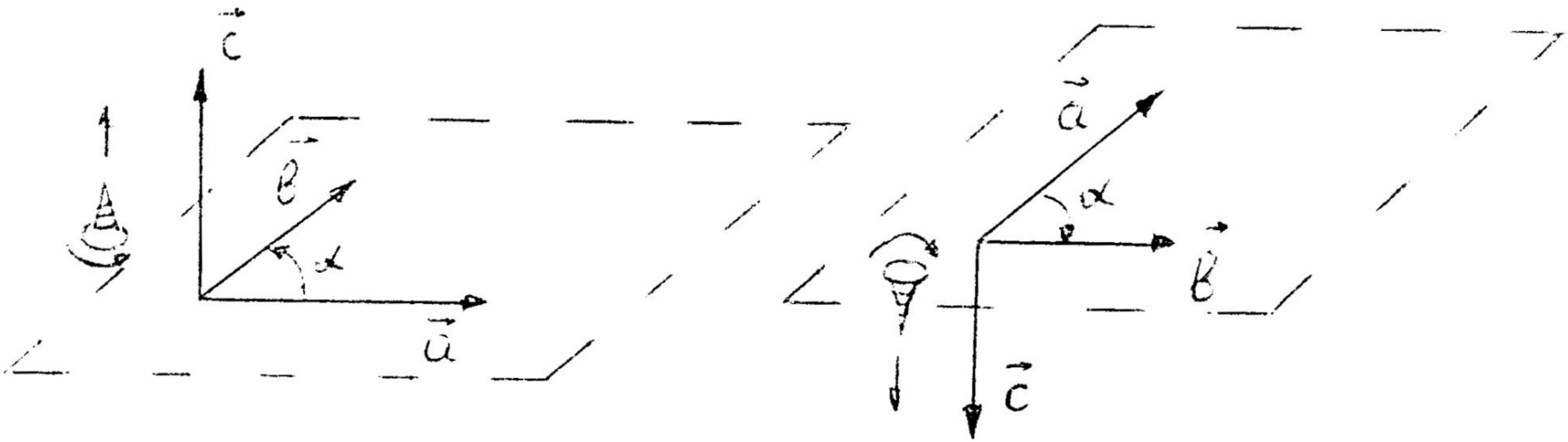
Движение на звездите около южния полюс

б) Ъгъл на завъртане

Изменението на позиционния ъгъл за интервал време Δt (тоест ъгъла, който R описва при движението на материалната точка):

$$\Delta\vec{\varphi} = \vec{\varphi} - \vec{\varphi}_{\mathbf{0}}$$

се нарича ъгъл на завъртане. Неговата посока съвпада с посоката на Oz при движение в директна посока и е обратна на Oz при движение в индиректна посока (по часовниковата стрелка) – **правило на винта**. Когато: $\Delta t \to 0,\ \Delta\vec{\varphi} \to 0$ и се означава с $\mathbf{d}\vec{\varphi}$.



$\vec{c}$
$\vec{b}$
α
$\vec{a}$
$\vec{a}$
α
$\vec{b}$
$\vec{c}$

в) Ъглова скорост

Бързината на изменение на ъгъла на завъртане се характеризира с ъглова скорост.

- **Средна ъглова скорост:**

Изменението на ъгъла на завъртане за единица време:

$$\vec{\omega}_{\mathbf{cp}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$$

се нарича средна ъглова скорост на материалната точка в интервала време Δt и характеризира средната бързина на движението й по окръжността. Посоката на $\vec{\omega}_{cp}$ се определя от посоката на $\Delta\vec{\varphi}$ (успоредна на оста Oz, правило на винта), а големината й се измерва в [rad/s].

- **Моментна ъглова скорост.**

  Когато интервалът време клони към нула (фиг.3.1), крайното положение на материалната точка е безкрайно близо до началното, а ъгълът на завъртане кло-ни към нула. Границата на отношението:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\omega}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{d}\vec{\varphi}}{dt}$$

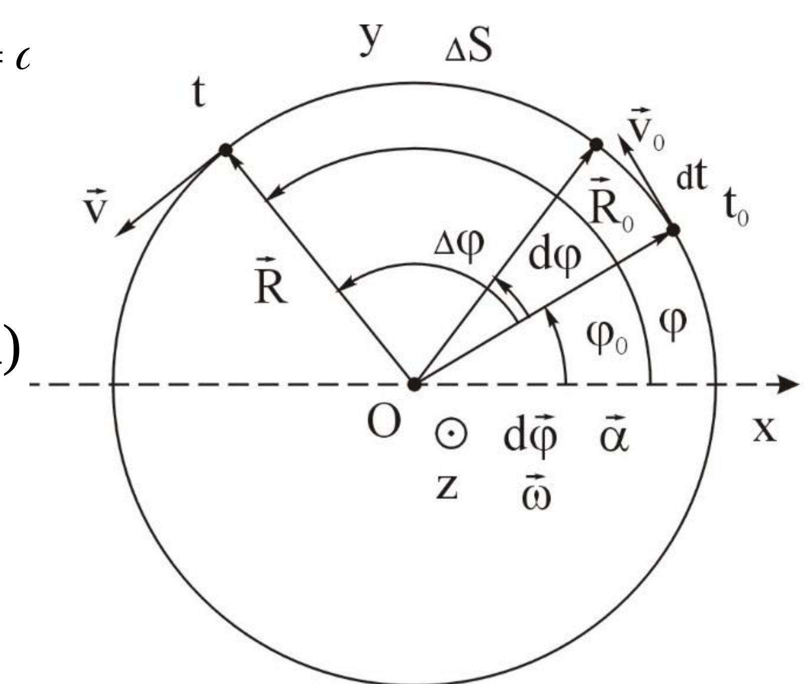
  се нарича моментна ъглова скорост (или само ъглова скорост) и характеризира бързината на движението във всеки момент време.

$\vec{\omega}$ е също аксиален вектор с посока, определяща се от посоката на $\mathbf{d}\vec{\varphi}$ (успоредна на Oz). Ъгловата скорост може да се намери, като се диференцира законът за движение $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$ по времето. Функцията $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ се нарича закон за ъгловата скорост.

г) Скорост (линейна скорост).

Моментната скорост **V** на материалната точка винаги има посока по допирателната към траекторията по посока на движението (фиг.3.1). Нейната големина v се определя от:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi\,R}{dt} = \omega$$



$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}$$

Тук: $\vec{\mathbf{v}} \perp (\vec{\omega}, \vec{\mathbf{R}})$

Накъде ще полети тялото?

Анимация с тяло, въртящо се около точка на нишка, когато нишката се скъса.

Демо

д) Ъглово ускорение

- **Средно ъглово ускорение.**

  Ъгловата скорост може да се изменя с времето. Нейното изменение за интер-вал време Δt е и представлява също аксиален вектор, успореден на Oz. Когато се увеличава с времето, посоката й съвпада с посоката на Oz при движение в директна посока и е обратна на Oz при движение в индиректна посока. Величината:

$$\vec{\alpha}_{cp} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

  се нарича средно ъглово ускорение на материалната точка в дадения интервал време.

- **Моментно ъглово ускорение.**

  Когато интервалът време клони към нула,

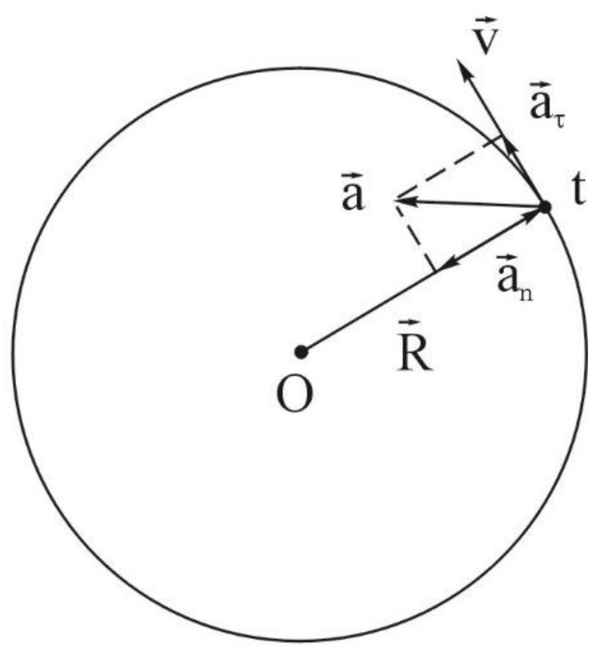
  $\vec{\omega} \to \vec{\omega}_0$, $\Delta\vec{\omega} \to 0$, а границата на отношението:

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\alpha}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{d}\vec{\omega}}{dt} = \frac{\mathbf{d^2}\vec{\varphi}}{dt^2}$$

  се нарича моментно ъглово ускорение (или само ъглово ускорение). То характеризира моментната бързина на изменение на ъгловата скорост.

е) Разлагане на ускорението.

При движението на материалната точка по окръжността скоростта й може да се изменя по големина и посока. Ускорението има посока, несъвпадаща с посоката на скоростта и може да се разложи на нормална и тангенциална съставка.



- **Тангенциално ускорение**:

$$a_\tau = \frac{d\,\mathrm{v}}{dt} = \frac{d\omega R}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = \alpha R$$

Във векторен вид:

$$\vec{\mathbf{a}}_\tau = \vec{\alpha} \times \vec{\mathbf{R}}$$

- **Нормално ускорение:**

Неговата големина е: $$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \omega^2 R$$

а във векторен вид:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}} = -\omega^2 \vec{\mathbf{R}}$$

Равномерно движение по окръжност

Равномерно движение по окръжност. Когато големината на скоростта v на материалната точка не се изменя с времето, движението се нарича равномерно движение по окръжност. В този случай:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\tau} = 0\ ,\ \left|\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}}\right| = const\ ,\ \vec{\alpha} = 0\ ,\ \mathrm{v} = const\ ,\ \vec{\omega} = \vec{\omega}_{cp} = const$$

Период. Равномерното движение по окръжност е повтарящо се движение. Най-малкият интервал време, след който движението се повтаря, се нарича период T. Основната единица за измерване на периода е секунда. Ако за интервал време Δt материалната точка прави N на брой обиколки по окръжността, периодът е:

$$T = \frac{\Delta t}{N}$$

Честота. Честотата показва колко пъти се повтаря движението за единица време (една секунда). Означава се с ν (или f). Ако за време Δt материалната точка прави N обиколки по окръжността, честотата е:

$$\nu = \frac{N}{\Delta t}$$

Основната единица за честота е Херц: [1Hz = 1/s]. Между периода и честотата има връзка:

$$T = \frac{1}{\nu}$$

Големините на скоростта, ъгловата скорост и нормалното ускорение могат да се изразят чрез периода и честотата:

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi\nu R \qquad \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2\nu^2 R$$