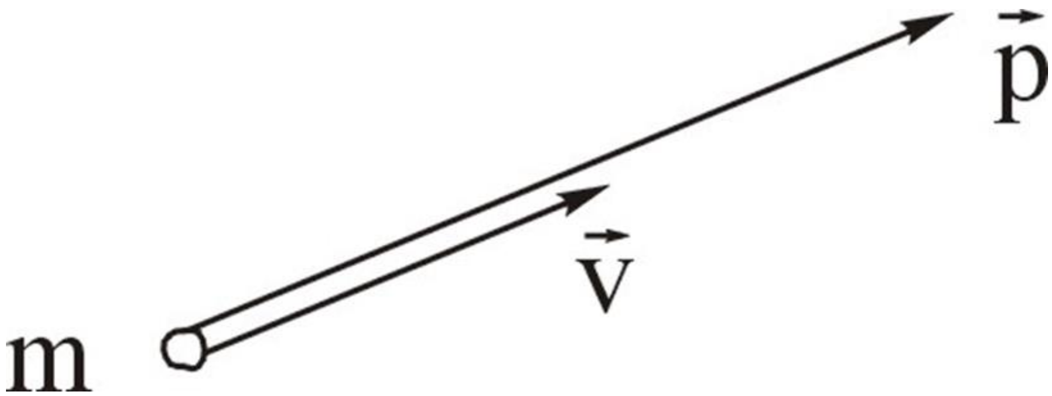
Въпрос 4.
Импулс на тяло и импулс на сила. Втори принцип на динамиката, написан с импулс. Момент на импулс и момент на сила спрямо точка и ос. Връзка между тях. Двойка сили.

Импулс на тяло.



Импулсът на тялото е векторна величина, равна на произведението от масата на тялото и скоростта му:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$$

Посоката на импулса винаги се определя от посоката на скоростта. Единицата за големината на импулса е [kg.m/s].

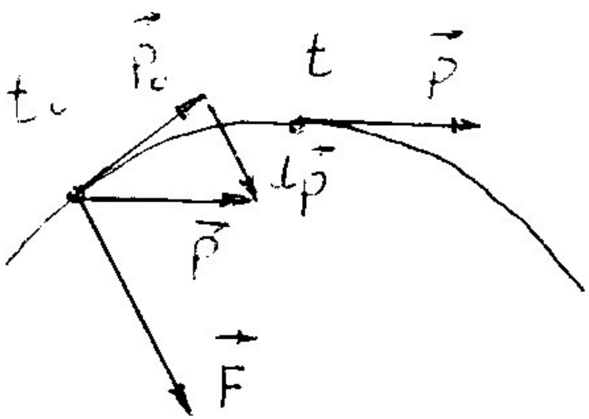
Импулсът на едно тяло е 0, само когато тялото е в покой.

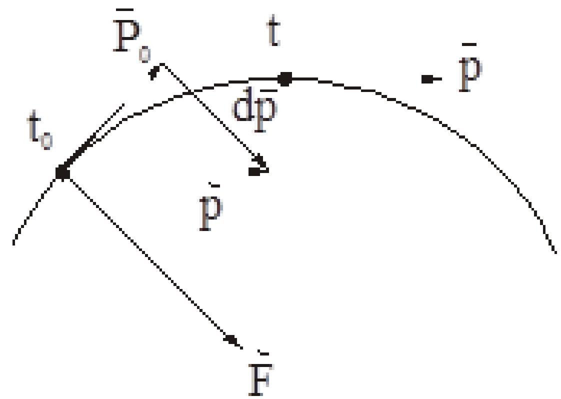
Втори принцип на динамиката, написан с импулс на тяло

Ако масата на тялото не се променя по време на движението му (m = const), можем да напишем:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Действащата на тялото сила е равна на бързината на изменение на импулса на тялото с времето. Посоката на силата тук се определя от посоката на изменението на импулса $\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}$, когато $\Delta t \to 0$





Това е нова, по обща формулировка на втория принцип на Нютон, която остава вярна и когато масата на тялото се променя по време на движението му ($m \neq const$).

3. Импулс на сила.

а) Елементарен импулс на сила. Безкрайно малката величина $\vec{\mathbf{F}}dt$ [N.s] се нарича елементарен импулс на една сила за време dt. Съгласно втория принцип на динамиката:

$$\vec{\mathbf{F}}dt = \mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}$$

той е равен на безкрайно малкото изменение на импулса на тялото за това време.

б) Общ импулс на сила. Когато интервалът време Δt е произволно голям, силата може да се изменя по големина и посока. Ако разделим интервала на безкрайно много, безкрайно малки части dt и за всяка намерим елементарния импулс на силата, тогава величината:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{\mathbf{F}}dt = \int_{p_0}^{p} \mathbf{d}\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{0}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}$$

се нарича общ импулс на сила.

Физическият смисъл на импулса на силата е, че голяма сила, действаща за малко време, предизвиква същото изменение на импулса на тялото, както и малка сила, действаща за голямо време.

Момент на импулс и момент на сила

Момент на импулс.

а) Момент на импулс спрямо точка.

Да разгледаме материална точка с маса m, която се движи със скорост $\vec{\mathbf{v}}$ спрямо точка О, в която е началото на отправната координатна система (фиг.11.1а). Импулсът на точката е $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$, а нейният радиус-вектор е $\vec{\mathbf{r}}$. Величината:

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$

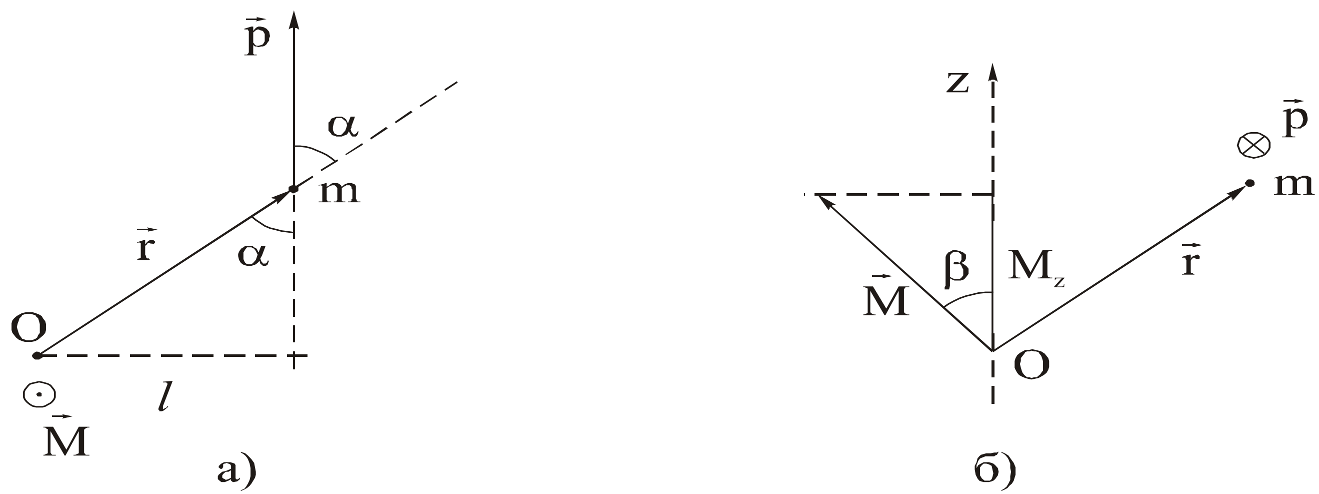
се нарича момент на импулса на тялото спрямо точка О. Направлението на $\vec{\mathbf{M}}$ е перпендикулярно на равнината, образувана от векторите $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}})$, а посоката му се определя по правилото на винта (от чертежа към нас). Големината му е:

$$M = r\ p \sin\alpha = [kgm^2/s]$$

където α е ъгълът между двата вектора. От правоъгълния триъгълник на фиг.11.1а имаме: $r\sin\alpha = l$, което се нарича рамо на импулса. Тогава:

$$M = l\ p$$

Моментът на импулса е 0, когато $\vec{\mathbf{r}}$ е успореден на $\vec{\mathbf{p}}$ ($\alpha = 0, 180°$) и е максимален, когато двата вектора са перпендикулярни ($\alpha = 90°$).



фиг. 11. 1

б) Момент на импулс спрямо ос.

Нека през точка O да преминава произволна ос (напр. Oz) (фиг.11.1 б). Проекцията M_z на вектор $\vec{\mathbf{M}}$ върху оста Oz се нарича момент на импулса спрямо ос:

$$M_z = M \cos\beta$$

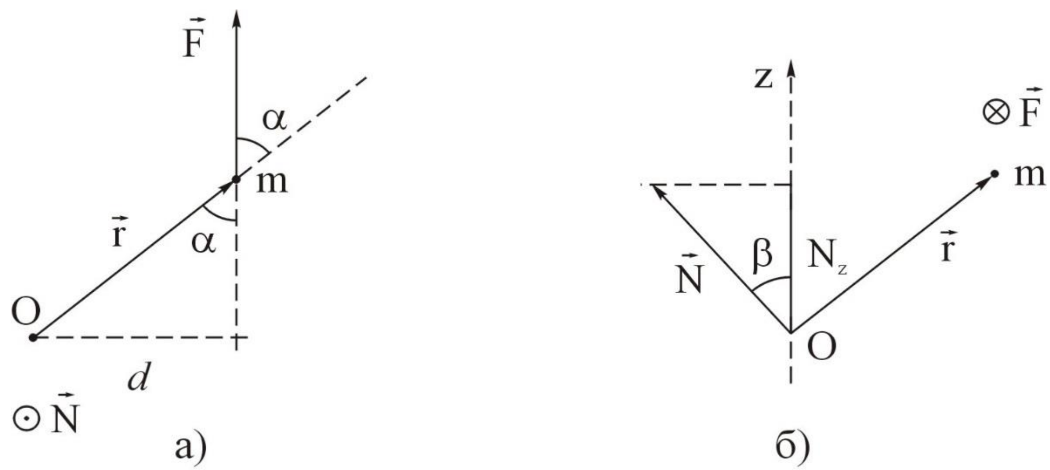
където β е ъгълът между $\vec{\mathbf{M}}$ и оста. M_z е нула, когато $\vec{\mathbf{M}}$ е перпендикулярен на оста Oz.

Момент на сила.

а) Момент на сила спрямо точка.

Нека на материалната точка да действа сила $\vec{\mathbf{F}}$ (фиг.11.2а). Под момент на сила спрямо точка О се разбира величината:

$$\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$



фиг. 11. 2

Посоката на $\vec{\mathbf{N}}$ е перпендикулярна на равнината на векторите $\left(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{F}}\right)$, определена по правилото на винта (от чертежа към нас), а големината му е:

$$N = r\,F\,\sin\alpha = [Nm]$$

Аналогично величината $d = r\,\sin\alpha$ се нарича рамо на силата и тогава:

$$N = d\,F$$

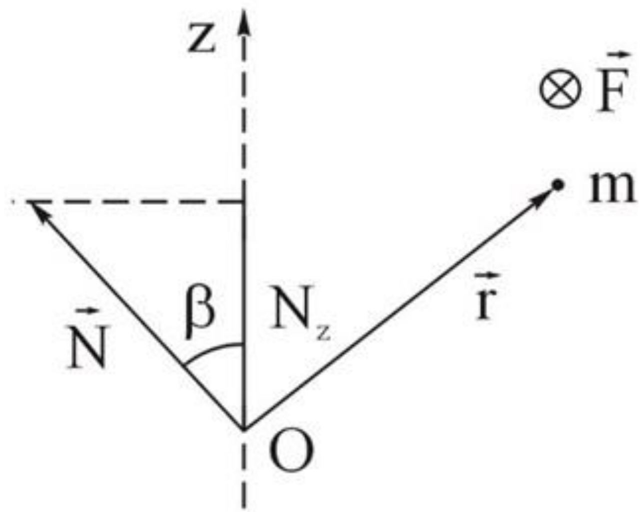
И тук моментът на силата спрямо точка О е нула, когато двата вектора са успоредни (директрисата на силата пресича точка О) и максимален, когато те са перпендикулярни.

б) Момент на сила спрямо ос.

Моментът на силата $\vec{\mathbf{F}}$ спрямо произволна ос (Oz), минаваща през точка O (фиг.11.2 б) е проекцията на вектор $\vec{\mathbf{N}}$ върху оста:

$$N_z = N \cos\beta$$

N_z е нула, когато вектор $\vec{\mathbf{N}}$ е перпендикулярен на оста.

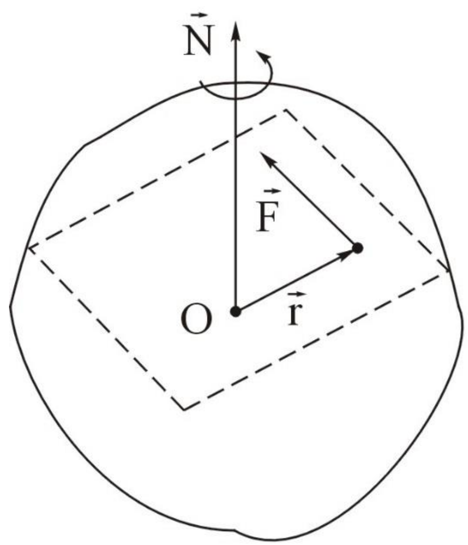


б)

Физически смисъл.

Моментът на импулса спрямо точка или ос характеризира въртенето на материална точка или твърдо тяло спрямо тях, а моментът на силата характеризира способността й да върти материалната точка или тялото спрямо дадената точка или оста.

Пример: Ако едно твърдо тяло може да се върти свободно около произволна точка O (фиг.11.3а), под действието на една сила $\vec{\mathbf{F}}$ тялото ще се завърти около точката в равнина, перпендикулярна на $\vec{\mathbf{N}}$. При това силата ще върти тялото толкова по успешно, колкото N е по-голям. Когато директрисата на $\vec{\mathbf{F}}$ пресича точка O, $\vec{\mathbf{N}} = 0$ и силата не може да върти тялото около точката.



Когато тялото може да се върти свободно около постоянна ос Oz, действаща-та на тялото сила $\vec{\mathbf{F}}$ можем да разделим на три компоненти (фиг.11.3 б):

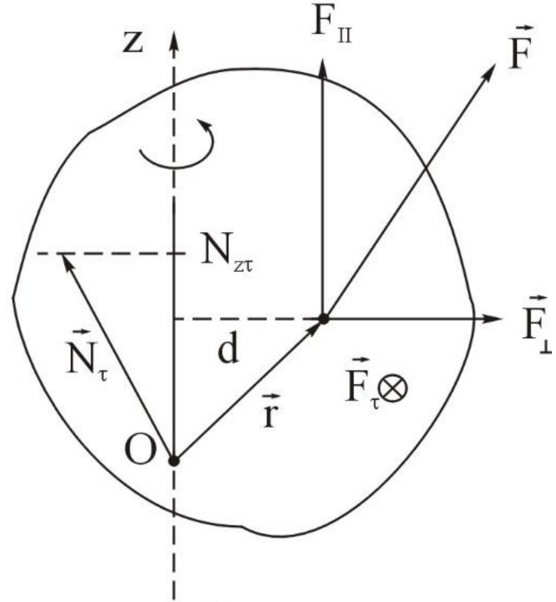
$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{\perp} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{II}} + \vec{\mathbf{F}}_{\tau}$$

където: $\vec{\mathbf{F}}_{\perp}$ е перпендикулярна на оста с момент $N_{z\perp} = 0$,

$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{II}}$ е успоредна на оста с момент $N_{z\|} = 0$ и

$\vec{\mathbf{F}}_{\tau}$ която е по тангентата към окръжността, минаваща през приложната точка на силата, с център на оста и перпендикулярна към нея. Моментът на тази сила е: $N_{z\tau} = d\, F_{\tau} \neq 0$.

От трите компоненти само силата $\vec{\mathbf{F}}_{\tau}$, чийто момент спрямо оста е различен от нула, ще завърти тялото около Oz, при това толкова по-успешно, колкото $N_{z\tau}$ е по-голям.



Връзка между момента на импулса и момента на силата.

Между двете величини $\vec{\mathbf{M}}$ и $\vec{\mathbf{N}}$ (съответно M_z и N_z) съществува важна връзка. Нека за една материална точка с радиус-вектор $\vec{\mathbf{r}}$, импулс $\vec{\mathbf{p}}$, на която действа сила $\vec{\mathbf{F}}$, да напишем втория принцип на динамиката:

$$\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$$

Умножаваме отляво векторно това равенство с $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

Но: $$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}\right) = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \qquad \left(\vec{\mathbf{v}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{p}}\right)$$

Тогава:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}\right) = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

Или: $$\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{M}}}{dt} = \vec{\mathbf{N}}$$

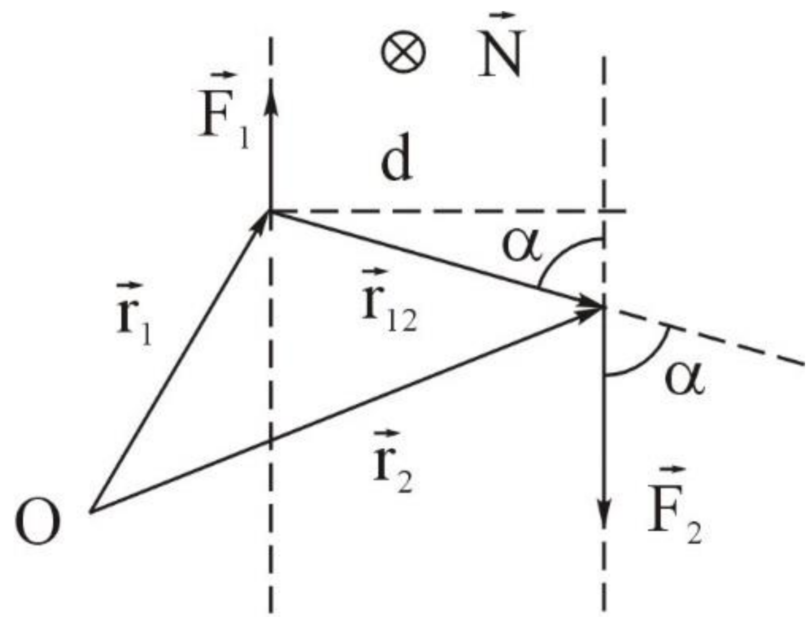
Подобна връзка имаме и между M_z и N_z :

$$\frac{dM_z}{dt} = N_z$$

Двойка сили.

Две равни по големина и противоположни по посока сили $(\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2)$, нележащи на една и съща директриса, се наричат двойка сили (фиг.11.4). Разстоянието между двете директриси d се нарича рамо на двойката сили. За силите имаме:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = -\vec{\mathbf{F}}_2$$



фиг. 11. 4

Моментът на двойката сили спрямо произволна точка O е:

$$\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}} + \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}} \times \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}} + \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}} \times \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}} = -\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}} \times \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}} + \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}} \times \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}} = \left(\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}}\right) \times \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}} \times \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}}$$

Тук $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}}$ е вектор от приложната точка на първата сила към приложната точка на втората. Вижда се, че $\vec{\mathbf{N}}$ не зависи от избора на точка O и е един и същ за всяка точка. Моментът на двойката сили е перпендикулярен на равнината на двете директриси, а посоката му се определя по правилото на винта. Големината му е:

$$N = r_{12}\, F_2 \sin\alpha = d\, F_2 = d\, F_1$$

Когато двете сили лежат на една и съща директриса, имаме: $\vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}} = -\vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}}$ и:

$$\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}} = 0$$