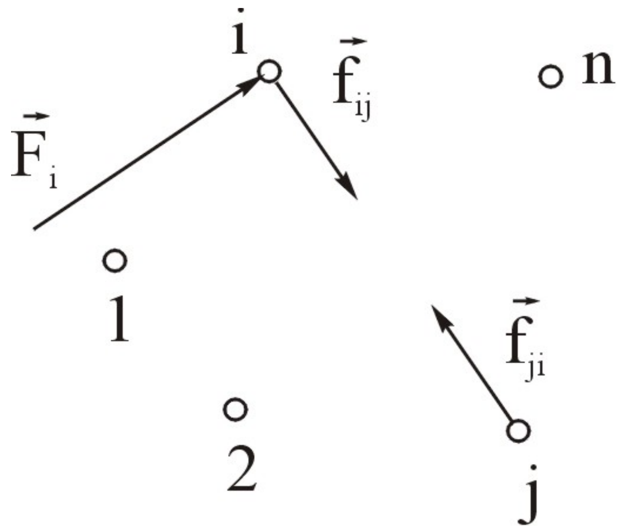
ВЪПРОС 6. СИСТЕМА ОТ МАТЕРИАЛНИ ТОЧКИ. ЦЕНТЪР НА МАСИТЕ. ИМПУЛС НА СИСТЕМА ОТ ТЕЛА. ДВИЖЕНИЕ НА ЦЕНТЪРА НА МАСИТЕ. ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА ИМПУЛСА. МОМЕНТ НА ИМПУЛС И НА СИЛА НА СИСТЕМА ОТ ТЕЛА

Система от материални точки

а/ Определение: Съвкупност от тела (материални точки), които взаимодействат помежду си нарича система от тела (материални точки)

б/ Видове сили действащи на системата от тела:



- вътрешни сили на взаимодействие. Те лежат на правите съединяващи всеки две взаимодействащи си точки от системата. За тях е в сила третия принцип на механиката:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

- външни за системата сили обусловени от тела непринадлежащи на системата от материални точки.

$$\vec{F}_i^{\,в}$$

- ще предполагаме, че системата не обменя маса с околната среда т.е. по време на механичните експерименти общата маса на системата от частици не се мени, както и масата на всяка отделна частица не се променя.

в/ В зависимост от вида на силите: -затворена система: $\vec{F}_i^{\,в} = 0$

-отворена система: $\vec{F}_i^{\,в} \neq 0$

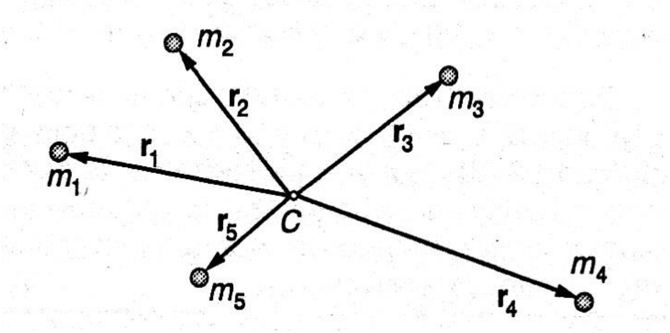
Център на масите

а/ Определение: Центъра на масите се дефинира за система от материални точки. Това е точка от пространството с радиус вектор който се дефинира така:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{M}$$

б/ Особености: Центъра на масите е точка от пространството и не е задължително да съвпада с материална точка от системата.

в/ Физически смисъл: Ако поставим центъра на отправна координатна система в центъра на масите тогава следва, че дясната страна на равенството $M\vec{r}_c = \sum^{n} m_i\vec{r}_i$ т.е. $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i = 0$.



Центъра на масите е такава геометрична точка С, за която сумата от произведенията на масите на материалните точки и техните радиус вектори прекарани от точка С е равна на нула.

ИМПУЛС НА СИСТЕМА ОТ ТЕЛА

а/ Определение: Под импулс на система от тела (материали точки) ние разбираме сумата от импулсите на отделните частици

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

б/ Приложна точка на импулса на системата от тела: Приложната точка на импулса на системата е в центъра н масите С. От горното равенство следва:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) = M\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}\right) = M\frac{d}{dt}\vec{r}_c = M\vec{v}_c$$

Т.е. в сила е следната релация: $M\vec{v}_c = \vec{P}$

Където: $\vec{v}_c$ **е скоростта на центъра на масите**

Движение на центъра на масите

За i-тата частица от една система втория закон на Нютон ще се запише във вида:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i}^{n} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i^{\,в}$$

Ако сумираме двете страни на уравнението по i ще имаме:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \vec{f}_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,в}$$ където $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \vec{f}_{ij} = 0$$

След преобразования намираме:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,в} = \vec{F}^{\,в} \qquad (1)$$

ИЗВОД: Центъра на масите на система от материални точки се движи както би се движела материална точка с маса, равна на сумата от масите на материалните точки, под действието на сила която с суперпозиция от външните за системата сили приложени в центъра на масите. Ако системата извършва постъпателно движение това уравнение ще определя ускорението на всяка точка от системата.

ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА ИМПУЛСА

От уравнение (1) ако допуснем, че системата от тела е изолирана, т.е външни сили не действат получаваме

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \text{, т.е. } \vec{P} = cons' t$$

- Горното равенство изразява закона за запазване на импулса за една затворена система от тела (или ако външните сили се уравновесяват). Той гласи, че общият импулс на системата остава постоянен, докато импулсите на отделните тела могат да се изменят с времето, но така че тяхната сума да е постоянна.
- Това е основен закон за запазване във физиката.
- Той е пряко следствие от еднородността на пространството(еднаквост на свойствата във всяка точка на пространството) т.е. паралелен пренос на една затворена система от една част на пространството в друга без да се изменя взаимното разположение на частиците и техните скорости няма да измени механичните свойства на системата.

ПРИМЕР!!! ДЕМОСТРАЦИЯ

Момент на импулса на система от тела.

Адитивните величини:

$$\vec{\mathbf{M}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{M}}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{i}} \right) \qquad \text{и} \qquad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{zi}$$

се наричат съответно момент на импулса на системата спрямо точка O и момент на импулса на системата спрямо ос (Oz), минаваща през точка O.

Момент на сили на система от тела.

Адитивната величина:

$$\vec{\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{i}}$$

се нарича момент на силите на система от тела спрямо точка O. За него получаваме:

$$\vec{\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{i}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{ij}} \right) + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{N}}_{i}^{вън}$$

където $\vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{ij}}$ са моментите на вътрешните сили ($j \neq i$), действащи между i-тото и j-тото тяло, а $\vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{вън}}$ е моментът на външната сила, действаща на i-тото тяло. В горното равенство двойната сума $\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{ij}}$ е равна на нула, защото от третия принцип на динамиката вътрешните сили, действащи между i-тото и j-тото тяло са равни по големина, обратни по посока и лежат на една и съща ди-ректриса (двойка сили, лежащи на еднаква директриса). Тогава:

$$\vec{\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{вън}}$$

Или, моментът на силите на една система спрямо точка О е векторна сума от моментите на всички външни сили, действащи в системата. Моментите на вътрешните сили не участват.

Аналогично се дефинира и адитивната величина момент на сили на система спрямо ос (Oz):

$$N_z = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{вън}$$

И тук е в сила основното равенство за връзката между $\vec{\mathbf{M}}$ и $\vec{\mathbf{N}}$:

$$\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{M}}}{dt} = \vec{\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{вън}} \quad \text{и} \quad \frac{dM_z}{dt} = N_z = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{вън}$$