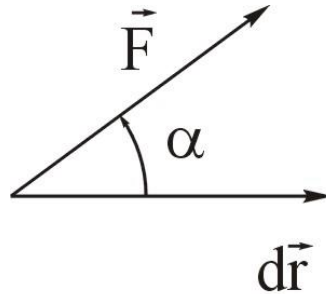


**ВЪПРОС 7. РАБОТА И
МОЩНОСТ. КИНЕТИЧНА
ЕНЕРГИЯ. КОНСЕРВАТИВНИ
СИЛИ И ПОТЕНЦИАЛНА
ЕНЕРГИЯ. ПОТЕНЦИАЛНА
ЕНЕРГИЯ НА
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ. ЗАКОН
ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА
МЕХАНИЧНАТА ЕНЕРГИЯ.**

1.МЕХАНИЧНА РАБОТА

а/Елементарна работа



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \alpha$$

фиг. 14. 1

б/Основна измервателна единица – [J]=[Nm]

в/основни характеристики:

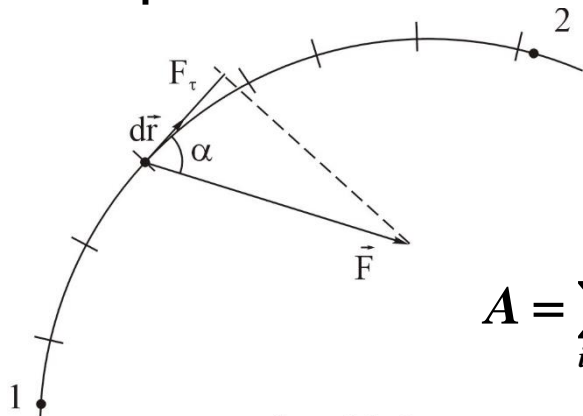
- dA скаларна и адитивна величина

- ако $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ то $dA > 0$

-ако $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ то $dA < 0$

-ако $\alpha = \frac{\pi}{2}$ то $dA = 0$

г/ **Обща работа:** Нека тяло се премества под действието на сила \vec{F} от точка 1 до точка 2 по указаната траектория. Търсим работа извършена от силата при преместването на точката. Разделяме траекторията S на безкрайно малки части $ds_1; ds_2; \dots; ds_i; \dots$. За елементарната dA извършена от силата \vec{F} за всяко ds_i имаме:



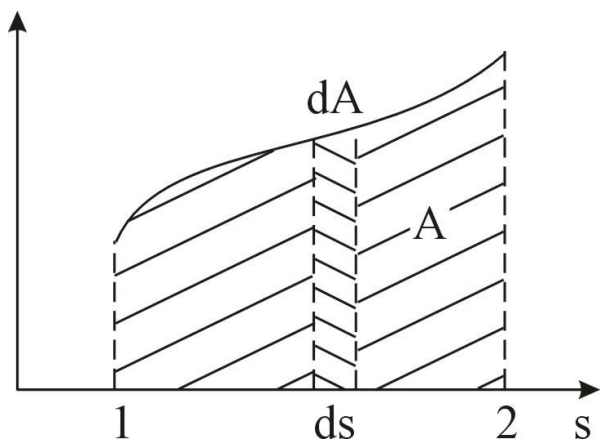
фиг. 14. 2

$$dA_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = F_i dr_i \cos \alpha_i$$

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} dA_i = \int_L dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

За да пресметнем интеграла трябва да знаем как се изменя силата по траекторията.

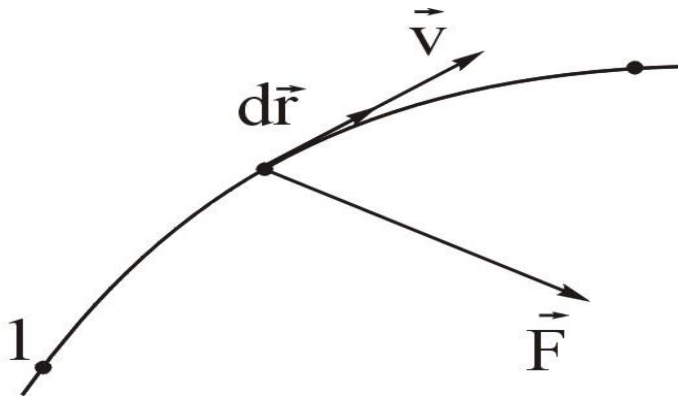
д/ **Графично представяне на елементарната и общата работа:**



$$A = \int_1^2 F \cos \alpha dr = \int_1^2 F_{\tau} ds$$

2. МОЩНОСТ

- а/ Определение: Бързината, с която се извършва работата се характеризира със скаларната величина мощност.
- б/ **Средна мощност**: Средна мощност на силата наричаме отношението на работата A и интервала време Δt , в който е извършена тази работа:



$$P_{cp} = \frac{A}{\Delta t}$$

Средната мощност може да бъде положително, отрицателно число или нула.

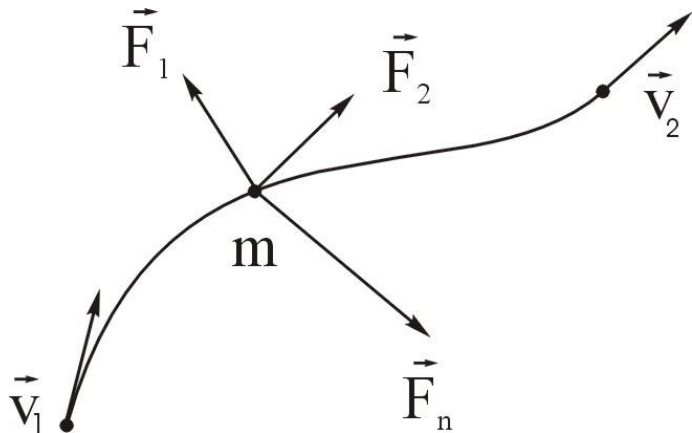
Това зависи от знака на работата. Основната единица за мощност е ват: $[1W] = [1J/1s]$.

- в/ **Моментна мощност**: Ако силата не е постоянна по посока и големина се въвежда величината моментна мощност:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{F dr \cos \alpha}{dt} = F \cos \alpha \frac{dr}{dt} = F \cos \alpha v = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

3. КИНЕТИЧНА ЕНЕРГИЯ

а/Работа за изменение на скоростта на едно тяло: Нека една материална точка с маса m се движи под действието на няколко сили: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ по произволна траектория. В началното положение нейната скорост е \vec{v}_1 , а в крайното ѝ положение скоростта е \vec{v}_2



От II закон на Нютон:

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Умножаваме двете страни на уравнението скаларно по $d\vec{r}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^N dA_i = dA \quad \rightarrow \quad \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 dA = A_{12}$$

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Вижда се, че работата на всички сили зависи само от масата на тялото и големината на крайната и началната му скорост, но не зависи от вида на траекторията и начина, по който се изменя скоростта.

б/Величината E_k наричаме кинетична енергия на тялото. Тя е скаларна величина. Очевидно тя има размерност на работа и се измерва в [J]. Зависи от масата и квадрата на скоростта и $E_k \geq 0$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

в/Теорема за изменение на кинетичната енергия: **ИЗМЕНЕНИЕТО НА КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ НА ЕДНО ТЯЛО Е РАВНО НА РАБОТАТА НА РАВНОДЕЙСТВАЩАТА НА ВСИЧКИ СИЛИ ПРИЛОЖЕНИ ВЪРХУ ТЯЛОТО.**

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = A_{12}$$

КРАЙНАТА КИНЕТИЧНА ЕНЕРГИЯ Е РАВНА НА НАЧАЛНАТА ПЛЮС РАБОТАТА ИЗВЪРШЕНА ВЪРХУ ТЯЛОТО

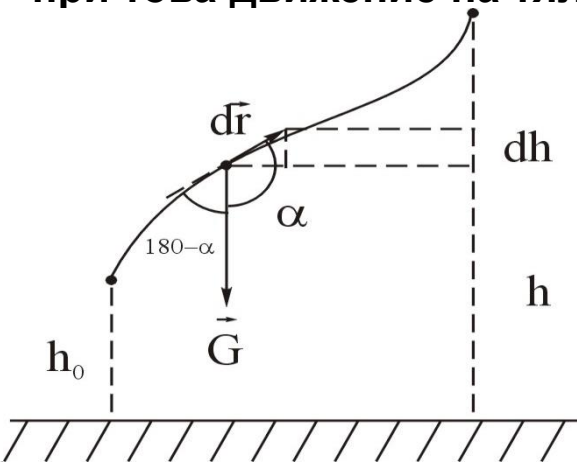
$$E_{k2} = E_{k1} + A_{12}$$

Ако $V_1=0$ т.е $E_{k1}=0$: **КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ Е РАВНА НА РАБОТАТА КОЯТО ТРЯБВА ДА СЕ ИЗВЪРШИ ОТ СИЛИТЕ ЗА ДА СЕ УСКОРИ ТЯЛОТО ОТ ПОЛОЙ ДО СКОРОСТ V.**

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = A$$

4. РАБОТА НА СИЛАТА НА ТЕЖЕСТТА

а/Постановка на задачата: Силата на тежестта \vec{G} действа на всяко тяло около Земята. Пространството около Земята се нарича поле на действие на силата на тежестта. Нека едно тяло с маса m се намира на начална височина h_0 над земята. Нека тялото се издига нагоре по произволна крива линия до крайна височина h . Във всеки момент време на тялото действа сила на тежестта с посока надолу. Да пресметнем нейната работа при това движение на тялото:



$$dA_G = G \cos \alpha dr$$

$$A_G = \int_{h_0}^h dA_G = \int_{h_0}^h G \cos \alpha dr = \int_{h_0}^h G dh$$

$$A_G = -G(h - h_0) = -mg(h - h_0) = -(mgh - mgh_0)$$

При движение нагоре: $A_G < 0, h > h_0$

При движение надолу: $A_G > 0, h < h_0$

ИЗВОД: Работата на силата на тежестта се представя като разлика от два члена от един и същи вид, които зависят само от крайното и начално положение на тялото, но не зависят от вида и дължината на траекторията.

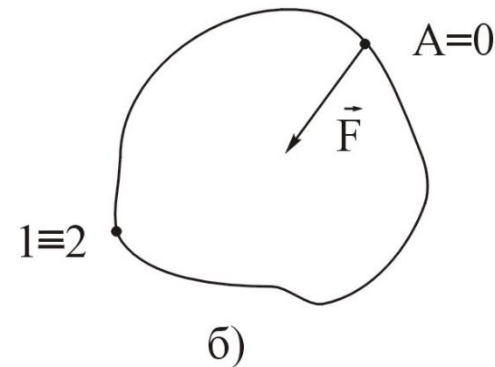
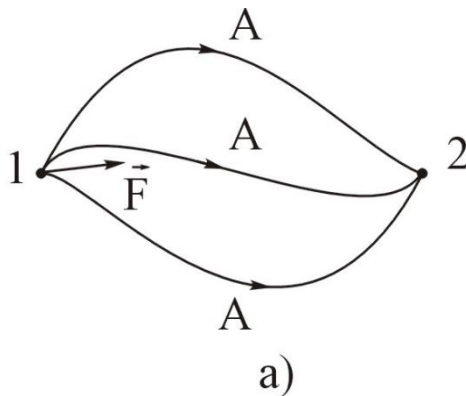
5. КОНСЕРВАТИВНИ СИЛИ. ПОТЕНЦИАЛНА ЕНЕРГИЯ

а/Определение: СИЛИ, ЧИЯТО РАБОТА НЕ ЗАВИСИ ОТ ВИДА НА ТЕАКТОРИЯТА НА ТЯЛОТО, А САМО ОТ НАЧАЛНОТО И КРАЙНОТО МУ ПОЛОЖЕНИЕ, СЕ НАРИЧАТ КОНСЕРВАТИВНИ.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = W(\vec{r}_0, \vec{r})$$

Ако тялото се движи по затворена крива горната и долната граница на интеграла съвпадат и РАБОТАТА ПО ЗАТВОРЕН КОНТУР НА КОНСЕРВАТИВНИТЕ СИЛИ Е НУЛА.

$$A_{kc} = \oint_L \vec{F}_{kc} \cdot d\vec{r} = 0$$



Доказва се, че да са в сила горните изисквания функцията W трябва да се явява разлика в стойностите на една и съща величина от началното и крайното състояние на тялото наречена **ПОТЕНЦИАЛНА ЕНЕРГИЯ НА ТЯЛОТО В ПОЛЕТО НА КОНСЕРВАТИВНАТА СИЛА.**

$$W(\vec{r}_0, \vec{r}) = E_p(\vec{r}_0) - E_p(\vec{r})$$

Потенциалната енергия зависи от вида на силата и положението на тялото в нейното поле на действие. Ето защо тя се нарича още енергия на положението. Основната единица за E_p е [J]. За разлика от кинетичната енергия потенциалната енергия може да бъде положително число, отрицателно число или нула. Избора на място където $E_p=0$ е зависи от характера на поставената задача.

В примера за G потенциалната енергия в полето на силата на тежестта има вида:

$$E_p = mgh$$

В термините на потенциалната енергия работа на консервативните сили има вида:

$$A_{kc} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

Съществува следната връзка между компонентите на консервативната сила и съответстващата и потенциална енергия:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}E_p(\vec{r})$$

За елементарната работа извършена от консервативната сила за безкрайно малко преместване имаме:

$$dA = -\left[E_p(\vec{r} + d\vec{r}) - E_p(\vec{r})\right] = -\text{grad}E_p \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

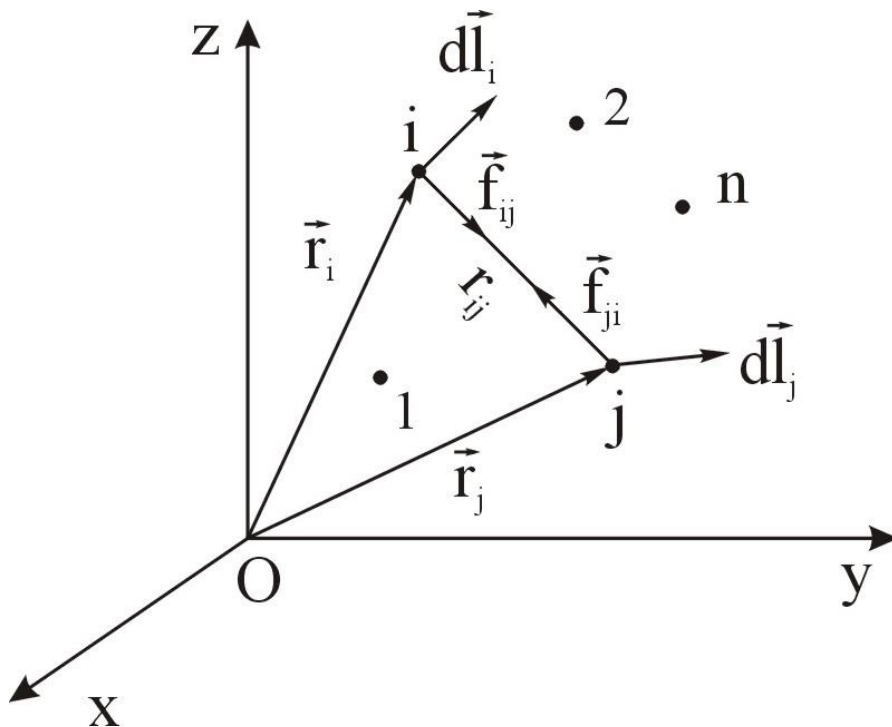
Това налага едно специфично изискване към консервативните сили: За тях трябва да съществува такава скаларна функция $E_p(x, y, z)$, че нейният пълен диференциал да е равен на елементарната работа извършена от силата при произволно елементарно преместване.

Примери за консервативни сили: еластичната сила, гравитационната сила, електростатичната сила.

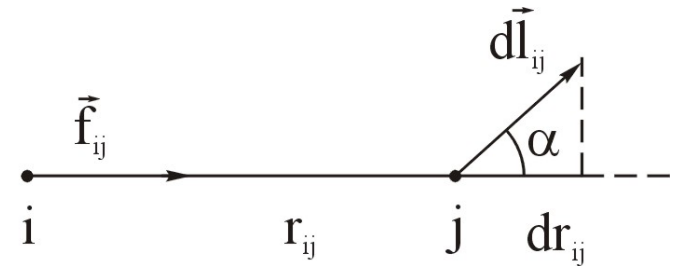
Примери за неконсервативни сили: магнитната сила, силата на триене.

6. ПОТЕНЦИАЛНА ЕНЕРГИЯ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕТО

а/ Постановка на задачата: Разглеждаме затворена система от n тела (материални точки). Ще смятаме, че вътрешните сили, които действат между телата от системата, зависят само от разстоянието r_{ij} между тях и за тях е в сила третия принцип на динамиката:



$$\vec{f}_{ij} = \vec{f}_{ij}(r_{ij}) \quad \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$



$$\begin{aligned} dA_i + dA_j &= \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{l}_i + \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{l}_j = \\ &= \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{l}_i - \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{l}_j = -\vec{f}_{ij} \cdot (d\vec{l}_j - d\vec{l}_i) = \\ &= -\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{l}_{ji} = -f_{ij} \cos \alpha dl_{ji} = -f_{ij} dr_{ij} \end{aligned}$$

Тогава за сумата от елементарните работи на силите сействащи на i и j -тата частица има вида:

$$dA_i + dA_j = -f_{ij}(r_{ij})dr_{ij}$$

Ако интегрираме между началното (a) и крайното (b) положение на телата при произволно тяхно преместване, получаваме:

$$A_i + A_j = \int_a^b (dA_i + dA_j) = -\int_a^b f_{ij}(r_{ij})dr_{ij}$$

Вижда се, че тези работи не зависят от вида на траекториите между двете тела, а само от изменението на разстоянието между тях при прехода от (a) в (b). Или подинтегралната функция представлява пълен диференциал на някаква скаларна функция $U_{ij}(r_{ij})$, зависеща само от разстоянието r_{ij} .

$$A_i + A_j = -\int_a^b dU_{ij} = -(U_{ij}^b - U_{ij}^a)$$

Величината U_{ij} се нарича потенциална енергия на взаимодействието между двете тела. Тя се дефинира едновременно за съвкупността от тях и зависи само от разстоянието между тях и вида на консервативните сили f_{ij}

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}$$

Потенциална енергия на взаимодействието на системата от n тела в полето на вътрешните консервативни сили

7. ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА ПЪЛНАТА МЕХАНИЧНА ЕНЕРГИЯ

а/ **Пълна механична енергия:**

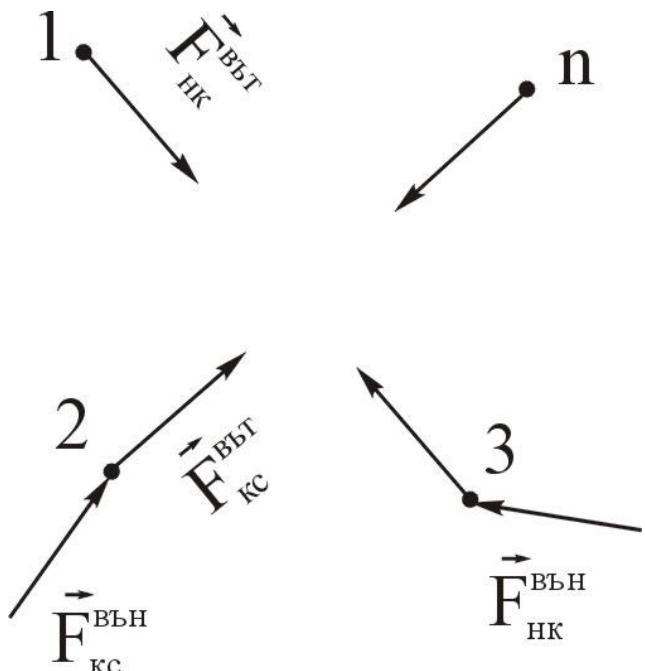
-за тяло с маса m което се движи със скорост V в полето на външна консервативна сила. То притежава кинетична и потенциална енергия. Сумата от двете наричаме пълна механична енергия

$$E = E_k + E_p$$

-произволна система от N тела, които се движат, се намира в полето на външни и вътрешни консервативни сили. Тогава системата има кинетична енергия E_k , потенциална енергия в полето на външните сили E_p и потенциална енергия на взаимодействието между телата U . Пълната механична енергия на системата е:

$$E = E_k + E_p + U$$

6/ **Закон за изменение на пълната механична енергия:** Разглеждаме произволна система от n тела, които се движат и се намират в полето на външни и вътрешни консервативни сили



$\vec{F}_{KC}^{\text{вът}}$ -вътрешни консервативни сили

$\vec{F}_{HK}^{\text{вът}}$ -вътрешни неконсервативни сили

$\vec{F}_{KC}^{\text{вън}}$ -външни консервативни сили

$\vec{F}_{HK}^{\text{вън}}$ -външни неконсервативни сили

$$A_{KC}^{\text{вът}} ; A_{HK}^{\text{вът}} ; A_{KC}^{\text{вън}} ; A_{HK}^{\text{вън}}$$

- работата извършена от тези сили

-съгласно теоремата за изменение на кинетичната енергия можем да запишем:

$$\Delta E_k = A_{KC}^{\text{вът}} + A_{HK}^{\text{вът}} + A_{KC}^{\text{вън}} + A_{HK}^{\text{вън}}$$

-работата на всички консервативни сили е равна на минус изменението на потенциалната енергия на системата

$$A_{KC}^{\text{вън}} + A_{KC}^{\text{вът}} = -\Delta E_p - \Delta U$$

Тогава: $\Delta E_k + \Delta E_p + \Delta U = \Delta E = A_{HK}^{вът} + A_{HK}^{вън}$

ИЗВОД: Изменението на механичната енергия на една отворена и неконсервативна система е равно на работата на вътрешните и външни неконсервативни сили.

в/ **Закон за запазване на пълната механична енергия:** Ако системата е консервативна (т.е. липсват неконсервативни сили), тогава: $A_{HK}^{вън} = 0$ и $A_{HK}^{вът} = 0$ от закона за изменението на механичната енергия се получава:

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta U = 0$$

Т.е $E = E_k + E_p + U = \mathit{const}$

ЗЗПМЕ: Пълната механична енергия в една консервативна система не се изменя с времето. Поотделно кинетичната, потенциалната енергия и енергията на взаимодействие могат да се изменят, но така че тяхната сума да остава постоянна. Отделните видове енергия се трансформират от един вид в друг.