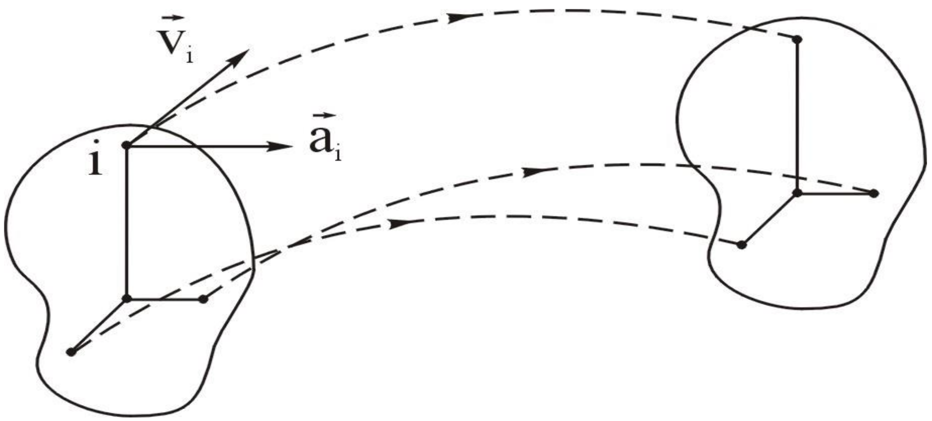
ВЪПРОС 8. КИНЕМАТИКА НА ИДЕАЛНО ТВЪРДО ТЯЛО (ИТТ). МОМЕНТ НА ИМПУЛС И СИЛА. ОСНОВЕН ЗАКОН НА ВЪРТЕЛИВОТО ДВИЖЕНИЕ. ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА МОМЕНТА НА ИМПУЛСА. СОБСТВЕН МОМЕНТ НА ИМПУЛСА.

I.КИНЕМАТИНА НА ИТТ

1. **Определение за ИТТ. Тяло, което по време на движението не променя формата и размерите си. Това означава, че взаимното разположение между частиците изграждащи тялото не се променя при движението, т.е. тялото не се деформира.**

2.Видове движения на ИТТ.

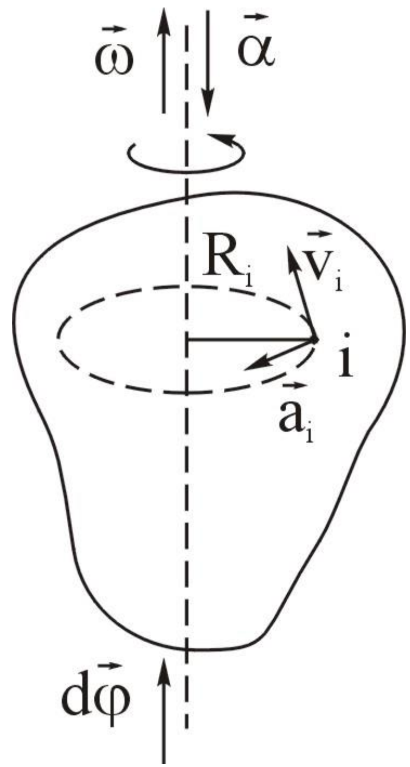
а/ постъпателно движение на ИТТ – всички частици изграждащи тялото се движат по един и същ начин



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$$

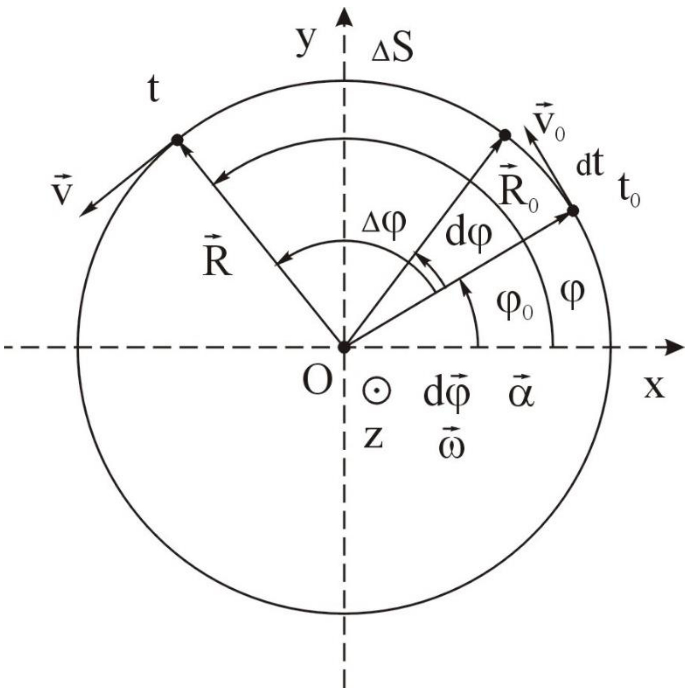
$$\vec{v}_i = \vec{v}_i(t)$$

б/ Въртене на ИТТ около постоянна ос: Това е такова движение при което поне две точки от тялото остават неподвижни. Въртенето се извършва по ос, която преминава през тези две точки. При такова въртене всички точки от оста остават неподвижни. Всяка частица от тялото се движи по окръжност с център точка от оста, като равнината определена от окръжността е перпендикулярна на оста.



- **Частиците от тялото се движат по концентрични окръжности.**
- **Правят едно пълно завъртане за едно и също време наречено период T.**
- **Точките с различни радиуси имат различни линейни скорости**
- **Използвайки конвенционалния подход в описание на кинематичната система за всяка частица ще дефинираме различни закони радиус вектора и скоростта, което е непрактично и трудоемко**

НОВ ПОДХОД!!!! ИДЕЯ: За произволен интервал от време всички частици се завъртат на един същ ъгъл. Ще определяме положението на частица от тялото с т.нар. позиционен ъгъл. При движение на точката позиционния ъгъл се мени с времето. Единица [rad]



- $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$ закон за движение

- $\Delta\vec{\varphi} = \vec{\varphi} - \vec{\varphi}_o$ ъгъл на завъртане

определя изменението на позиционния за време Δt

- $\vec{\omega}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}\,[\dfrac{rad}{s}]$ средна ъглова скорост

- $\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ моментна ъглова скорост

- $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}\,[\dfrac{rad}{s^2}]$ ъглово ускорение

За да изучим движението е необходимо да знаем $\Delta\vec{\varphi}; \vec{\omega}; \vec{\alpha}; R_i$

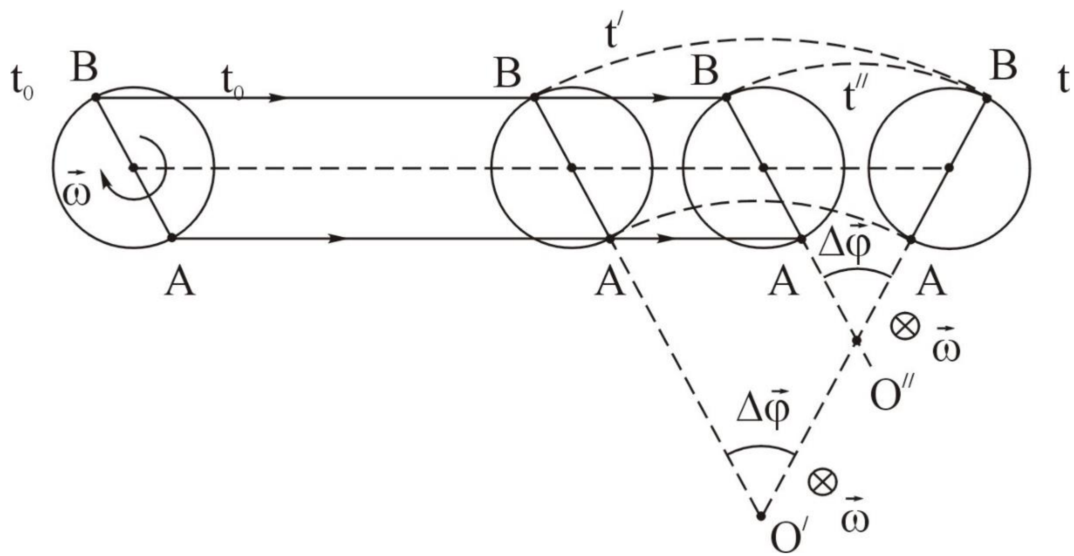
в/ Връзка между линейни и ъглови характеристики:

$$d\vec{r}_i = d\vec{\varphi}\times\vec{R}_i \qquad \vec{a}_{\tau i} = \vec{\alpha}\times\vec{R}_i$$

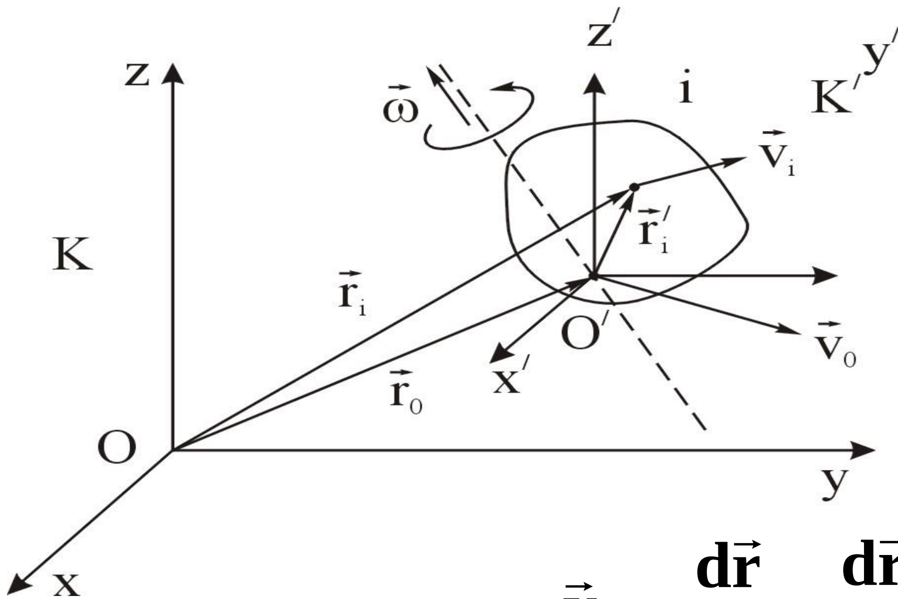
$$\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{R}_i \qquad \vec{a}_{ni} = -\omega^2\vec{R}_i$$

г/Общо движение на ИТТ: Това е движение при което всички точки от тялото се движат по различен начин.

- ТЕОРЕМА за ралагане на движението на ИТТ: Всяко произволно деижение на ИТТ може да се представи като сума от транслационно движение плюс въртене около моментна ос на въртене, чието направление в пространството може да се променя с времето. Това разлагане може да се направи по безброй много начини.



д/ описание на произволно движение на ИТТ: Разглеждаме произволно движение на ИТТ спрямо инерциална отправна система К. Въведаме спомагателна координатна система К′ с начало в произволна точка О′ от тялото, която се движи транслационно с тялото спрямо К..



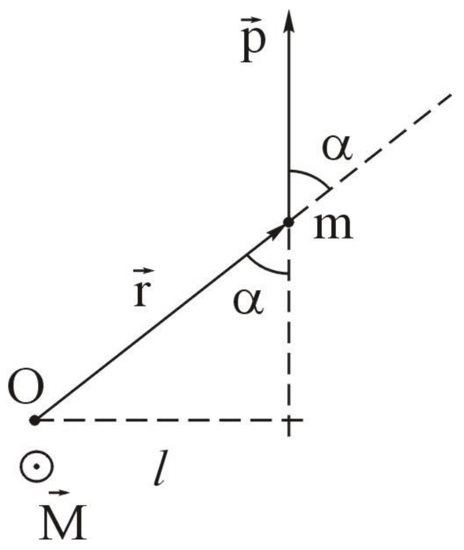
$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_{tr\,i} + d\vec{r}_{rot\,i}$$

Скоростта на точката е: $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{tr}\,\mathrm{i}}}{dt} + \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{rot}\,\mathrm{i}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{tr}\,\mathrm{i}} + \vec{\mathbf{v}}'_{\mathbf{rot}\,\mathrm{i}}$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$$

II.МОМЕНТ НА ИМПУЛС И СИЛА

1.Момент на импус спрямо точка.



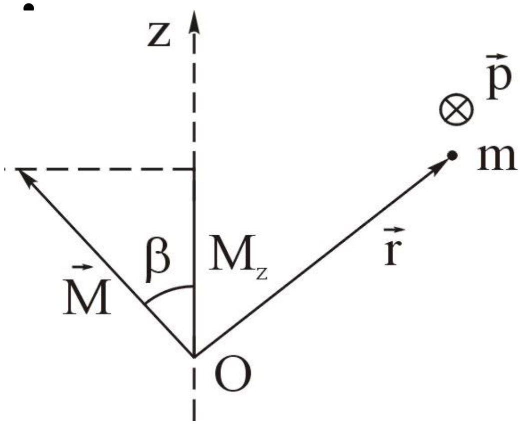
- **а/определение: Величината:** $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$
- **се нарича момент на импулса на тялото спрямо точка О.**
- **б/Направление** $\vec{M}$ **: перпендикулярно на равнина, образувана от векторите (r и p), а посоката му се определя по правилото на винта (от чертежа към нас).**
- **в/Големина на** $\vec{M}$

$$M = rp\sin\alpha\,[\frac{kgm^2}{s}]$$

- **където α е ъгълът между двата вектора.**
- **г/рамо на импулса: Разстоянието от т.О до линията на действие на импулса:** $M = lp$
- **д/гранични случаи: Моментът на импулса е 0, когато r е успореден на p (α = 0, 180°) и е максимален, когато двата вектора са перпендикулярни (α = 90°).**

2. Момент на импулса спрямо точка. През точка О да преминава произволна ос (напр. Oz)

•

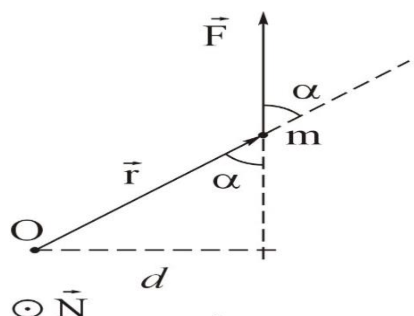


а/определение: Проекцията M_z **на вектор** $\vec{M}$ **върху оста** O_z **се нарича момент на импулса спрямо ос:**

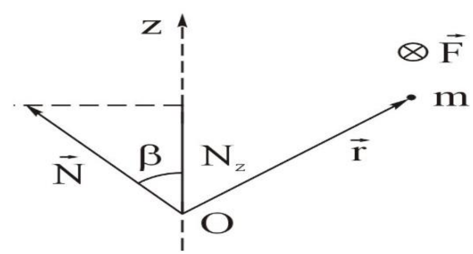
$$M_z = M\cos\beta$$

където β е ъгълът между $\vec{M}$ **и оста** O_z**.** M_z **е нула, когато** $\vec{M}$ **е перпендикулярен на оста** O_z**.**

3.Момент на сила спрямо точка и ос. Дефинират се аналогично.



а)



б)

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

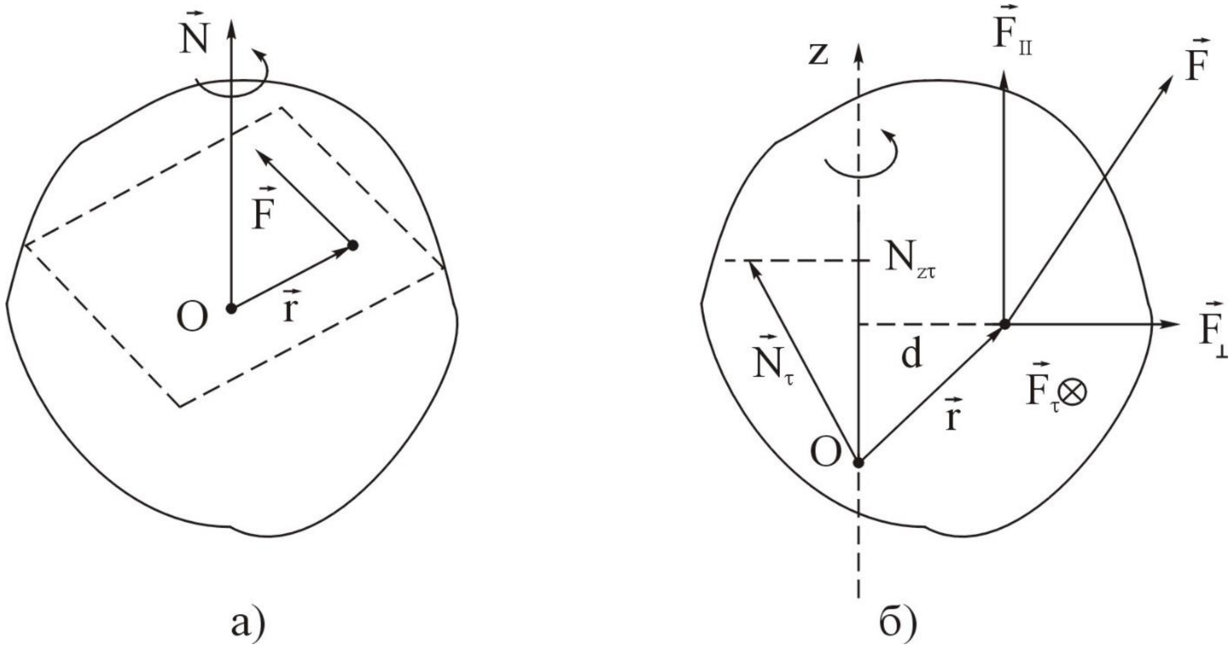
$$N = rF\sin\alpha\,[N.m]$$

$$N = Fd$$

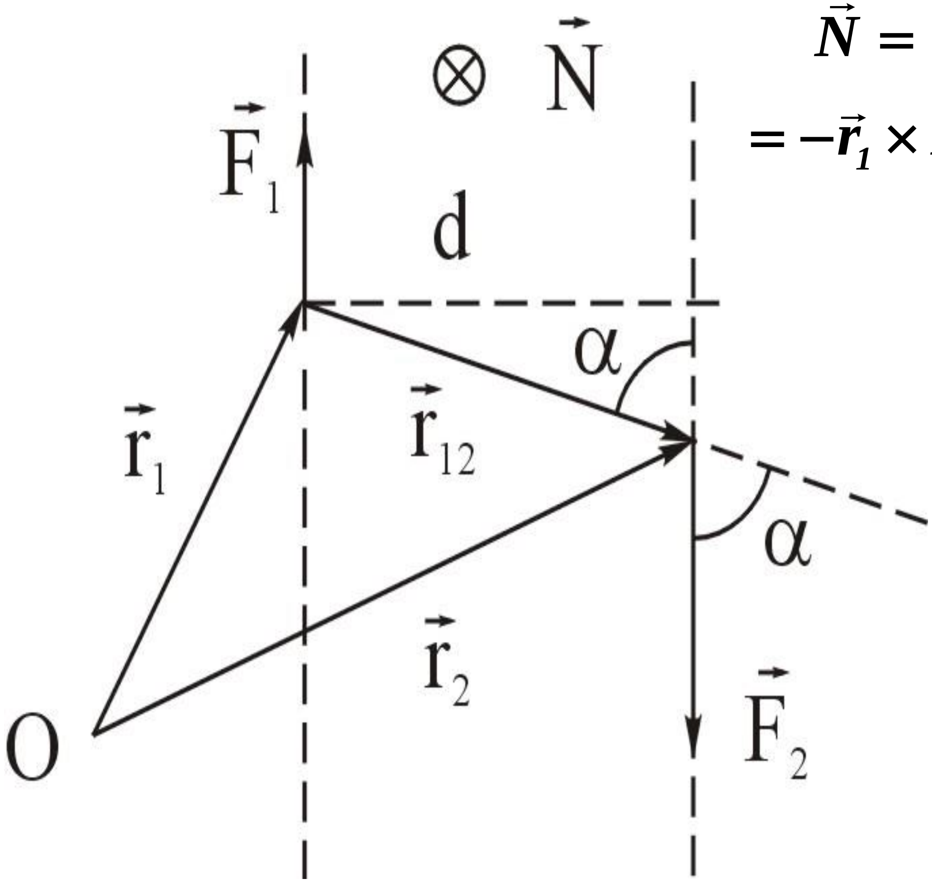
$$N_z = N\cos\beta$$

3.Физически смисъл на момента на импулс и сила. Моментът на импулса спрямо точка или ос характеризира въртенето на материална точка или твърдо тяло спрямо тях, а моментът на силата характеризира способността й да върти материалната точка или тялото спрямо дадената точка или оста.

ПРИМЕР:



16.Двойка сили: Две равни по големина и противоположни по посока сили , нележащи на една и съща директриса, се наричат двойка сили Разстоянието между двете директриси d се нарича рамо на двойката сили. За силите имаме:



$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 =$$

$$= -\vec{r}_1 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2$$

Когато двете сили лежат на една и съща директриса, имаме: $\vec{N}_1 = -\vec{N}_2$

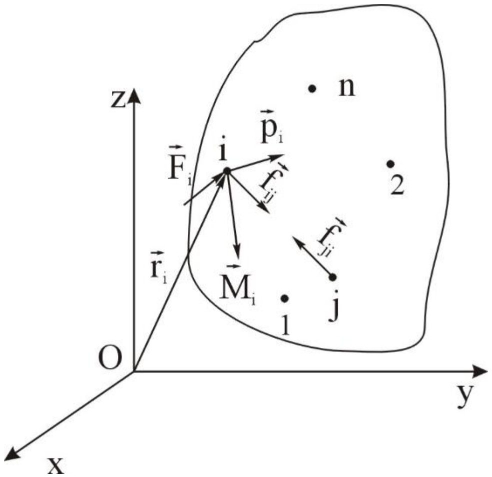
$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$$

III.ОСНОВЕН ЗАКОН НА ВЪРТЕЛИВИТЕ ДВИЖЕНИЯ

Ако ИТТ извършва постъпателно движение то за описанието на последното ще използваме уравнението на движение за центъра на масите.

$$M\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}_c = \sum_{i=1}^{\infty}\vec{F}_i \qquad \vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$$

1.Закон за изменение на момента на импулса на ИТТ: Ще разглеждаме ИТТ като система от материални точки които си взаимодействат и ще смятаме системата за отворена т.е действат външни сили



$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j\neq i}^{n}\vec{f}_{ij} + \vec{F}_i^{\,в}$$

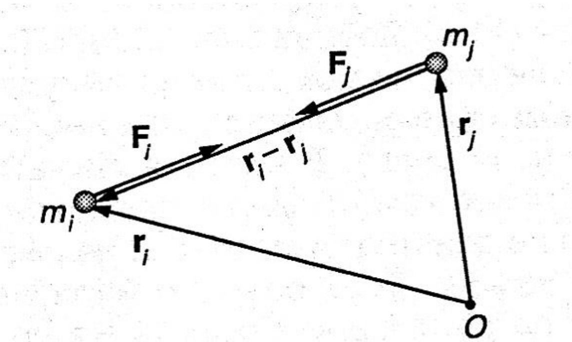
Нека векторно да умножим двете страни на уравнението по радиус вектора на i-тата частица и после извършим сумиране по всички частици изграждащи ИТТ.

Получаваме: $$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times\sum_{j\neq i}^{n}\vec{f}_{ij})+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{в}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=\frac{d}{dt}\vec{M}$$ - момента на импулса на ИТТ

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{в}=\sum_{i=1}^{n}\vec{N}_i^{в}$$ -сумата от моментите на всички външни сили

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times\sum_{j\neq i}^{n}\vec{f}_{ij})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq 1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij})=0$$ -сумата от моментите на вътрешните сили е нула. ДОКАЗАТЕЛСТВО!!!



$$\vec{M}_i+\vec{M}_j=\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}=$$

$$=\vec{f}_{ij}\times(\vec{r}_i-\vec{r}_j)=0$$

защото двата вектора са колинеарни

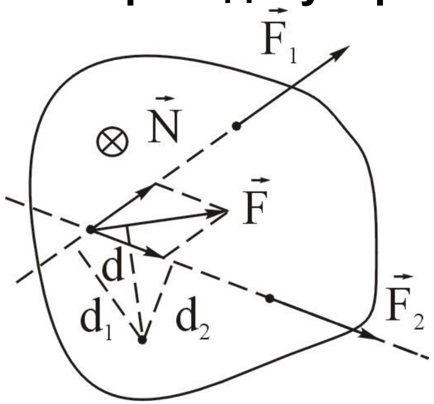
Тогава окончателно получаваме:

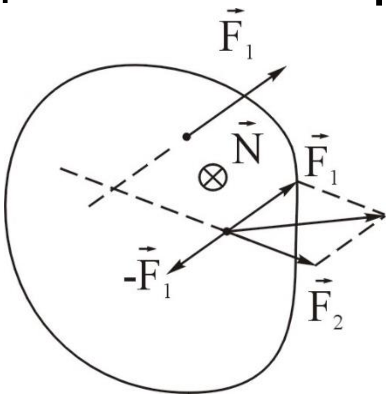
$$\frac{d}{dt}\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,в}$$

ИЗМЕНЕНИЕТО НА МОМЕНТА НА ИМПУЛСА НА ИТТ СПРЯМО ТОЧКАТА О Е РАВНО НА СУМАТА ОТ МОМЕНТИТЕ НА ВСИЧКИ ВЪНШНИ СИЛИ СПРЯМО ТОЧКАТА О .

2.Събиране на сили приложени върху ИТТ. Резултантна сила.

За разлика от материалната точка, когато ние винаги можем да определим резултантна сила при ИТТ това не винаги е възможно поради факта, че силите могат да имат различни приложни точки в ИТТ. Само в случай на копланарни сили т.е. сили, които лежат в една равнина може да се дефинира резултантна сила. Момента на тази сила спрямо произволна точка е перпендикулярен на равнината определена от копланарните сили.





IV.ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА МОМЕНТА НА ИМПУЛСА

Ако системата е затворена или такава, че моментите на външните сили взаимно се неутрализират, то от закона за изменение на момента на импулса получаваме:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0$$

Или:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = const$$

ЗЗМИ: Момента на импулса на ИТТ се не мени с времето ако върху ИТТ не действат външни сили или моментите на външните сили взаимно се неутрализират. Моментите на импулсите на отделните тела могат да се изменят с времето, но така че общият момент на импулса да остава постоянна величина.

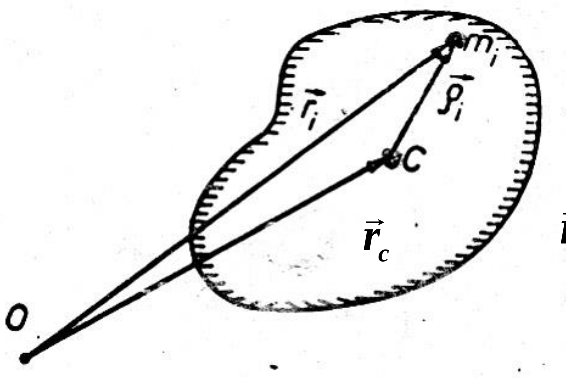
Законът за запазване момента на импулса следва директно от изотропността на пространството спрямо въртене.

V.СОБСТВЕН МОМЕНТ НА ИМПУЛСА

Момента на импулса очевидно зависи от избора на координатна система. Може ли да премахнем тази условност. Нека към центъра на масите придадем координатна система.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[(\vec{r}_c + \vec{\rho}_i)\times \vec{p}_i\right] =$$

$$= \vec{r}_c \times \vec{P} + \sum_{i=1}^{n}(\vec{\rho}_i \times \vec{p}_i) = \vec{r}_c \times \vec{P} + \vec{M}_c$$



$\vec{r}_c \times \vec{P}$ **-момента на импулса на центъра на масите на ИТТ спрямо О. Зависи от избора на начало**

$\vec{M}_c = \sum_{i=1}^{n}(\vec{\rho}_i \times \vec{p}_i)$ **-не зависи от избора на О. Следователно да се избегне непостояннния първи член се избира О да съвпада със С.**

МОМЕНТЪТ НА ИМПУЛСА НА ТЯЛО СПРЯМО ОС КОЯТО МИНАВА ПРЕЗ ЦЕНТЪРА Н МАСИТЕ СЕ НАРИЧА СОБСТВЕН МОМЕНТ НА ИМПУЛСА.