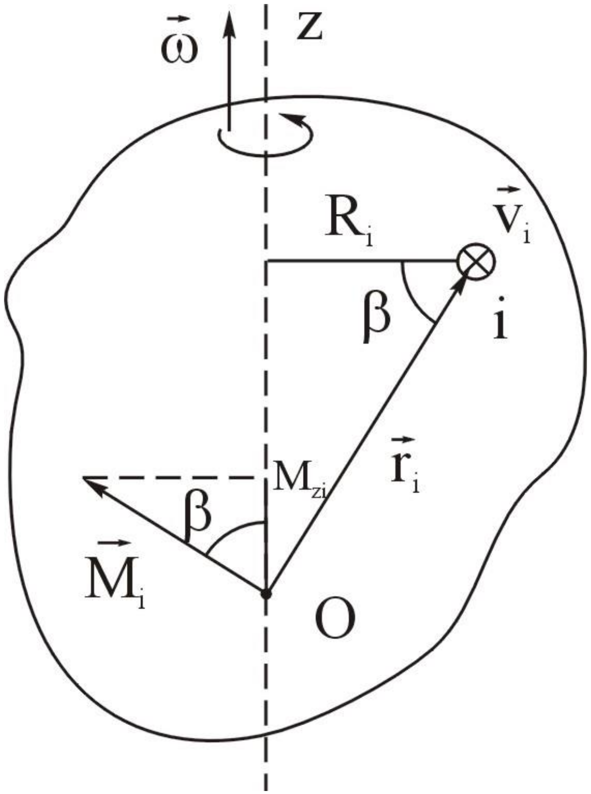
ВЪПРОС 9. ИНЕРЧЕН МОМЕНТ НА ТЯЛО. ТЕОРЕМА НА ЩАЙНЕР. СВОБОДНИ ОСИ НА ВЪРТЕНЕ. КИНЕТИЧНА ЕНЕРГИЯ НА ВЪРТЯЩО СЕ ТЯЛО. РАБОТА И МОЩНОСТ НА СИЛА ПРИ ВЪРТЕНЕ НА ТЯЛО.

I.ИНЕРЧЕН МОМЕНТ

1. Инерчен момент на тяло. Нека имаме ИТТ което се върти около постоянна ос O_z. Отново смятаме тялото съставено от частици и ще преработим основното уравнение на въртеливите движения. За момента на импулса на i-тата частица спрямо О имаме.



$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = r_i m_i v_i = r_i m_i \omega R_i$$

обаче $$r_i = \frac{R_i}{\cos\beta}$$

тогава: $$M_i = m_i \frac{R_i^2}{\cos\beta}\omega$$

За момента на импулса на i-тата точка спрямо оста O_z имаме:

$$M_{iz} = M_i \cos\beta = (m_i R_i^2)\omega = I_{iz}\omega$$

Величината I_{iz} наричаме инерчен момент на i-тата спрямо оста O_z.
Тогава за момента на импулса на тялото относно оста имаме:

$$M_z = \sum_i M_{iz} = (\sum_i m_i R_i^2)\omega = I_z \omega$$

Величината: $I_z = \sum_i m_i R_i^2$ **инерчен момент на тялото относно оста O_z.**

Диференцирайки двете страни на горното уравнение получаваме:

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{d(I_z\omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha = \sum_i N_{iz}^{в}$$

Т.е произведението на ъгловото ускорение с инечния момент на тялото спрямо остта на въртене е равно на сумата от проекциите на моментите на силите на въртене действащи върху тялото по оста O_z.

$$I_z \alpha = \sum_i N_{iz}^{в}$$

Това уравнение е аналог на втория принцип на динамиката. Т.е. съществува линейна връзка между моментите на силите действащи на тялото и ъгловото ускорение. Ролята на маса тук изпълнява инерчния момент. Той характеризира инертността на телата относно завъртане около дадена ос. Т.е. фактът, че не променят ъгловата си скорост мигновено, а постепенно. Формулата със сумата за намиране на инерчния момент е неудобна.

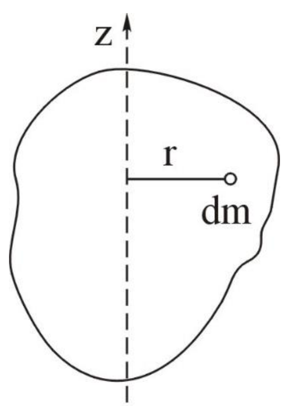
Ще смятаме, че твърдото тяло е непрекъсната среда и ще дефинираме величината плътност на тялото.

$$\rho = \frac{m}{V} \; [\frac{kg}{m^3}]$$

Ако плътността зависи от мястото ще казваме, че тялото е нехомогенно и масата му не е разпределена равномерно в обема му.

Ако плътността е константа във всички точки на тялото тогава казваме, че тялото е хомогенно и имаме равномерно разпределение на масата в обема му.

Тогава разделяме тялото на безкрайно много елементарни части с маси dm и обеми dV



$$dI = r^2 dm$$

$$I_z = \int_V dI = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho \, dV$$

2.Основни свойства на инерчния момент.

-инерчния момент се измерва в единици [kg.m²]

-инерчния момент е адитивна величина само ако е дефиниран към една и съща ос на въртене.

-инерчния момент зависи от формата и размерите на тялото, от това как е разпределена масата на тялото в обема му, от избора на оста на въртене и нейното направление в пространството.

ПРИМЕР: Ако на едно тяло не му действат външни сили то момента на импулса на тялото не се променя във времето. Обаче от уравнението

$$M_z = I\omega$$

се вижда, че ъгловата скорост на тялото може да се измени ако се измени инерчния момент на тялото. Това може да стане в една затворена система само ако се промени формата на тялото от вътрешни сили. Ако се увеличи инерчния момент на тялото ще намалее ъгловата скорост на въртене, така че момента да остане непроменен т.е.

$$I_{z1}\omega_1 = I_{z2}\omega_2$$

3.Примери за пресмятане на инерчни моменти на хомогенни тела имащи висока степен на симетрия.

а/ инерчен момент на хомогенен цилиндър спрямо ос минаваща през центровете на двете му основи:

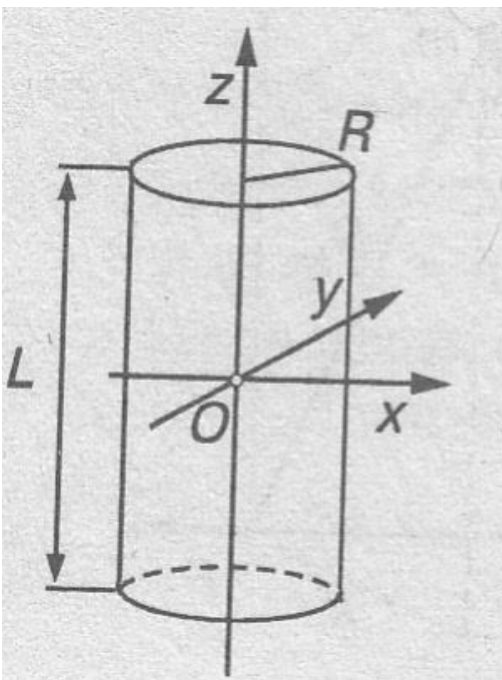
преход от декартови в цикиндрични координати

$$x = r\cos\varphi \qquad r \in [0;R]$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi \in [0;2\pi] \qquad dV = dxdydz = D(r,\varphi,z)drd\varphi dz = rdrd\varphi dz$$

$$z = z \qquad z \in [0;H]$$

Тогава:

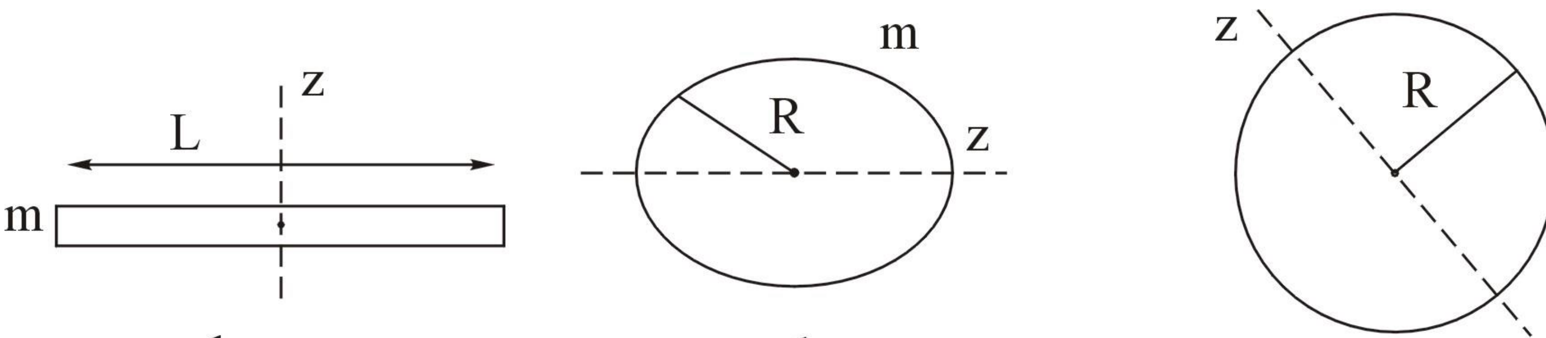


$$I_z = \int_V \rho r^2 dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H \rho r^2 r dz d\varphi dr =$$

$$= 2\pi H\rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi H\rho R^4 = \frac{1}{2}(\pi R^2 H)\rho R^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(V\rho)R^2 = \frac{1}{2}mR^2$$

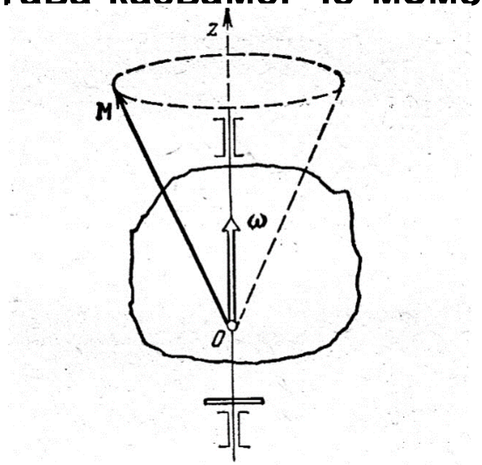
б/инерчни моменти съответно на: а)дълга тънка хомогенна пръчка с маса m и дължина L, въртяща се около ос, перпендикулярна на тялото и минаваща през центъра на масите;б) на тънък хомогенен диск с маса m и радиус R, въртящ се около ос, съвпадаща с диаметъра на диска; с)на хомогенна сфера с маса m и радиус R, въртяща се около произволна ос, минаваща през центъра й.

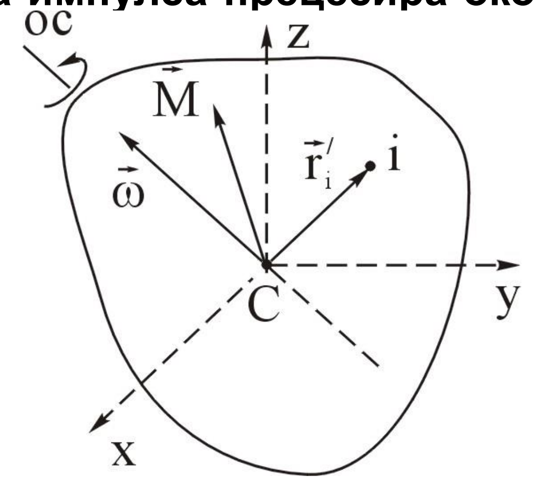


$I=\frac{1}{12}mL^2$ а) $I=\frac{1}{4}mR^2$ б) $I=\frac{2}{5}mR^2$ в)

II.СВОБОДНИ ОСИ НА ВЪРТЕНЕ

1.Тензор на инерчния момент. Доказахме, че проекцията на момента на импулса на едно ИТТ е равна на произведението от инерчния момент на тялото спрямо оста на въртене и големината на ъгловата скорост. Това твърдение в вярно и във векторна форма само ако въртенето се извършва около специално подбрана ос, при която посоката на ъгловата скорост съвпада с момента на импулса по тази ос. За произволна ос това не е вярно защото момента на импулса сключва някакъв ъгъл с оста на въртене. Тогава казваме, че момента на импулса прецесира около оста на въртене.





Това означава, че i-тата компонента на импулса е линейна функция на всички компонентите на ъгловата скорост. В общия случай инерчния момент е симетричен тензор от втори ранг, който се представя с една симетрична матрица характеризиращи инерчните свойства на тялото при въртене около ос.

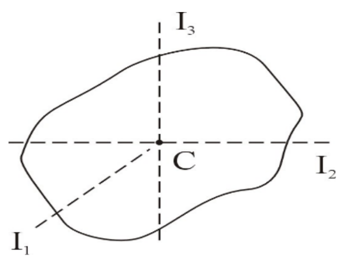
Елементите по главния диагонал: I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} се наричат осеви инерчни моменти, а тези извън него: $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$ се наричат центробежни инерчни моменти.

2.Свободни оси на въртене.

а/определение: Това са такива, оси около които ако завъртим едно ИТТ то те не променят ориентацията си в пространството, ако не действат външни сили и около които тялото може да се върти безкрайно дълго време.

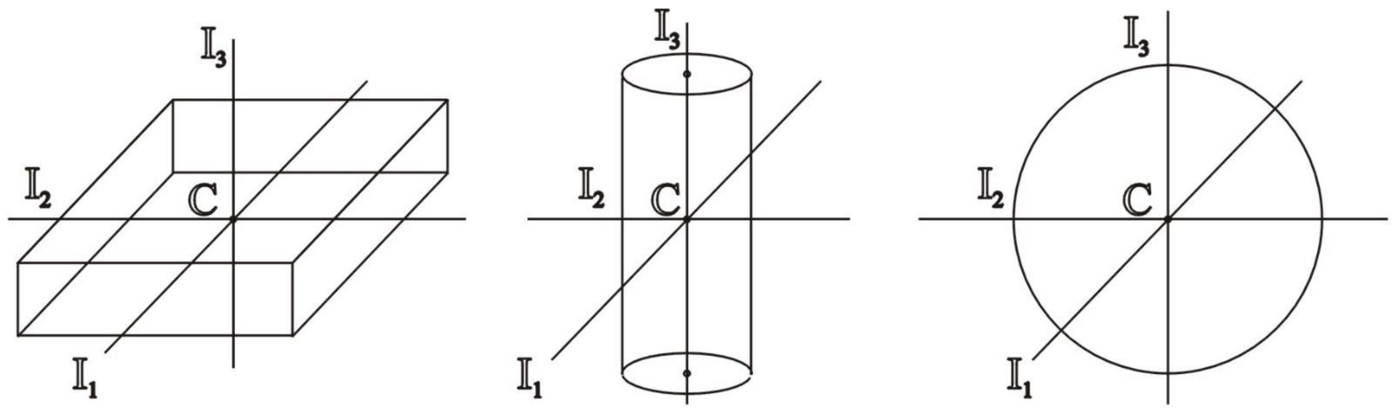
Спрямо такава ос, разпределението на веществото в тялото е симетрично, инертните свойства на тялото взаимно се уравновесяват и оста запазва направлението си в пространството и без да е закрепена. В този случай моментът на импулса на тялото съвпада с направлението на оста и вектора на ъгловата скорост.

За всяко произволно ИТТ винаги съществуват три взаимно перпендикулярни свободни оси на въртене (фиг.30.6), които се пресичат в центъра на масите на тялото. Инерчните моменти I_1 , I_2 и I_3 на тялото спрямо тези оси се наричат главни инерчни моменти и в общия случай са различни помежду си. В координатна система въвпадаща със свободните оси на въртене тензора на инерчния момент се диагонализира:



$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_x & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_y & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I}_z \end{pmatrix}$$

б/примери за свободни оси на въртене на различни хомогенни тела (паралелепипед, цилиндър, сфера) притежаващи някаква степен на симетрия.



1, 2, 3 - определени
$I_1 \neq I_2 \neq I_3$

1, 2, - произволни
3 - определена
$I_1 = I_2 \neq I_3$

1, 2, 3 - произволни
$I_1 = I_2 = I_3$

Устойчиво въртене на тялото при отсъствие на външни сили има само около свободна ос с максимален I_{max} и минимален I_{min} инерчен момент.

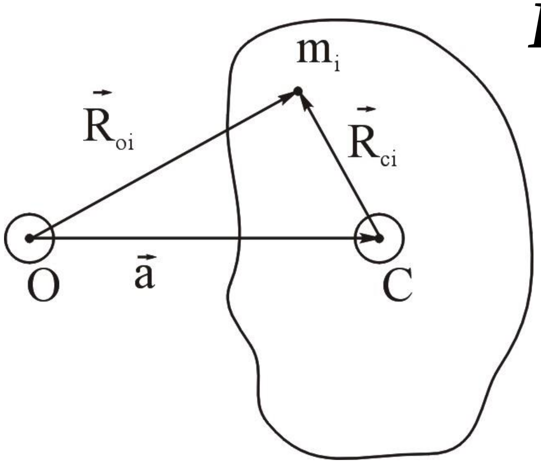
Когато на тялото действат външни сили (например сила на тежестта), устойчиво въртене на тялото съществува само около ос с I_{max}. При въртене около другите оси (което е неустойчиво) тялото лесно изменя направлението си в пространството и започва да се върти около ос с максимален инерчен момент

Важно в практиката да се подбира внимателно ос на въртене особено при голяма ъглова скорост. За да се запази оста на въртене се използват лагери. Ако оста е неподходяща възникват центробежни сили довеждащи до огъване или счупване на оста.

III.ТЕОРЕМА НА ЩАЙНЕР

1.Дефиниция: **Инерчния момент на тяло спрямо произволна ос на въртене може да се представи като сума от инерчния момент на тялото спрямо ос минаваща през центъра на масите му и е успоредна на първата и произведението от масата на тялото и квадрата на разстоянието между двете оси.**

2.Доказателство: **Нека разстоянието от оста, минаваща през точка О и перпендикулярна на чертежа, до произволна точка от тялото с маса m_i да разглеждаме като вектор R_{oi}. Нека съответното разстояние от оста, минаваща през точка С и успоредна на дадената, до съответната точка от тялото е вектор R_{ci} , а разстоянието между двете оси е вектор а. От триъгълника на фигурата образуван от тези вектори, имаме:**



$$\vec{R}_{oi} = \vec{a} + \vec{R}_{ci} \rightarrow R_{oi}^2 = \left(\vec{a} + \vec{R}_{ci}\right)^2 = a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{R}_{ci} + R_{ci}^2$$

$$I_0 = \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_{oi}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} m_i a^2 + \sum_{i=1}^{\infty} 2m_i \vec{a}\cdot\vec{R}_{ci} + \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_{ci}^2 =$$

$$= ma^2 + 2\vec{a}\cdot\sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{R}_{ci} + I_c$$

обаче: $\sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{R}_{ci} = m\vec{R}_c = 0$

Тогава окончателно получаваме:

$$I_0 = ma^2 + I_c$$

3. Приложения на теоремата на Щайнер:

а/ за хомогенен цилиндър с ос минаваща през околната повърхност и е перпендикулярна на основата

$$I = mR^2 + \frac{1}{2}mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

б/за хомогенна пръчка с ос минаваща през един от краищата и и е перпендикулярна на дългата страна на пръчката

$$I = m(\frac{l}{2})^2 + \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

в/за хамогенна сфера с ос която е допирателна към произволна точка от повърхността и

$$I = mR^2 + \frac{2}{5}mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

IV. КИНЕТИЧНА ЕНЕРГИЯ НА ИТТ ПРИ ВЪРТЕНЕ ОКОЛО ПОСТОЯННА ОС

Ще смятаме ИТТ като система от взаимодействащи си частици. При въртенето около произволна ос всички частици от тялото с изключение на тези от оста имат линеини скорости v_i и маса m_i.

$$E_k = \sum_{i=1}^{\infty} E_{ki} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Ако тялото е хомогенно и симетрично за кинетичната енергия имаме:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

За хомогенно и несиметрично тяло което се върти около произволна ос:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k=x,y,z} I_{ik} \omega_i \omega_k$$

Ако за координатна система сме избрали свободните оси, които се пресичаха в центъра на масите имаме:

$$E_k = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

Нека разгледаме едно произволно движещо се ИТТ. От теоремата за разлагане на произволното движението на ИТТ може да запишем:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}} + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}'$$

Замествайки във формулата за кинетичната енергия имаме:

$$E_k = \sum_{i=1}^{\infty} E_{ki} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i [\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,'}\,]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i v_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i [\,\vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,'}\,]^2 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i [\vec{v}_0 .(\vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,'}\,)] =$$

$$= \frac{1}{2} M v_o^2 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{r}_i^{\,'} .(\vec{\omega} \times \vec{v}_0\,) + \frac{1}{2} I_o \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M v_o^2 + M \vec{r}_c .(\vec{\omega} \times \vec{v}_0\,) + \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

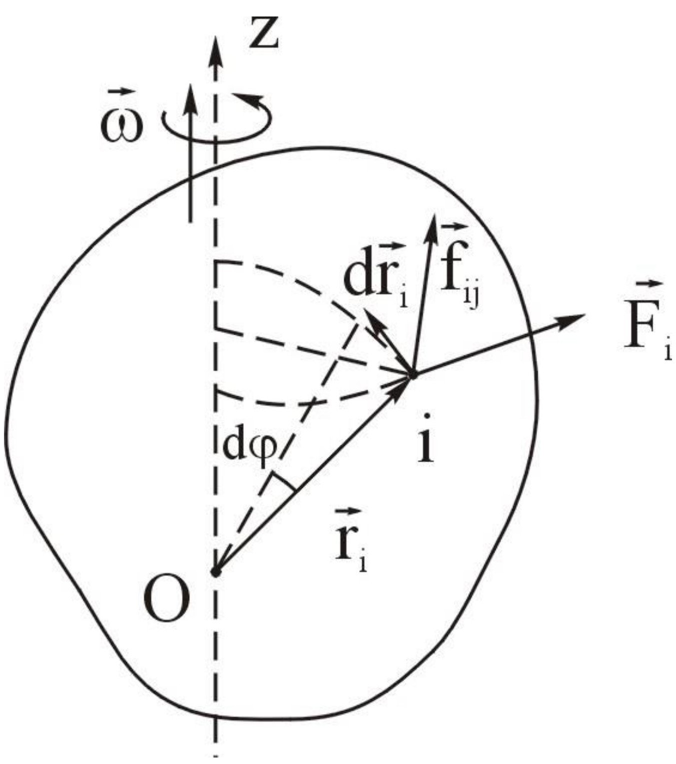
Ако отчета се извършва спремо координатна система спрямо центъра на масите на ИТТ получаваме:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ НА ТЯЛОТО ПРИ ПРОИЗВОЛНО НЕГОВО ДВИЖЕНИЕ Е СУМА ОТ КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ НА ПОСТЪПАТЕЛНОТО И КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ НА ВЪРТЕЛИВОТО ДВИЖЕНИЕ ОКОЛО МОМЕНТНА ОС МИНАВАЩА ПРЕЗ ЦЕНТЪРА НА МАСИТЕ МУ.

V.РАБОТА И МОЩНОСТ НА ВЪРТЕНЕ НА ИТТ ОКОЛО ПОСТОЯННА ОС

1.Работа при въртене на ИТТ около постоянна ос. Ще смятаме ИТТ като система от взаимодействащи си частици.



За елементарната работа извършена от силите действуващи i-тата частица е:

$$dA_i = \sum_{j\neq j}^{\infty} \vec{f}_{ij}\cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{j\neq i}^{\infty} \vec{f}_{ij}\cdot \vec{v}_i dt + \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt =$$

$$= \sum_{j\neq i}^{\infty} \vec{f}_{ij}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)dt + \vec{F}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)dt$$

След циклична замяна местата на векторите от смесеното произведение получаваме:

$$dA_i = \vec{\omega}\cdot\left(\sum_{j\neq i}^{\infty}\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}\right)dt + \vec{\omega}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)dt =$$

$$= \vec{\omega}\cdot\left(\sum_{j\neq i}^{\infty}\vec{N}_{ij}\right)dt + \vec{\omega}\cdot\vec{N}_i^{вън}dt$$

След сумиране по всички частици имаме:

$$dA = \sum_{i=1}^{\infty} dA_i = \vec{\omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \neq i}^{\infty} \vec{N}_{ij} \right) dt + \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,вън} dt$$

Обаче първата сума от дясната страна вече доказахме, че е нула и тогава окончателно имаме:

$$dA = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,вън} dt = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,вън} \right) \cdot d\vec{\varphi}$$

Когато тялото се завърта на ъгъл $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ около оста, общата работа на всички сили:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} dA = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,вън} \right) \cdot d\vec{\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{\,вън} \right) d\varphi$$

2. Мощност на силите :За мощността на силите имаме:

$$P = \frac{dA}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,вън} \right) \cdot \vec{\omega} = \left(\sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{\,вън} \right) \omega$$