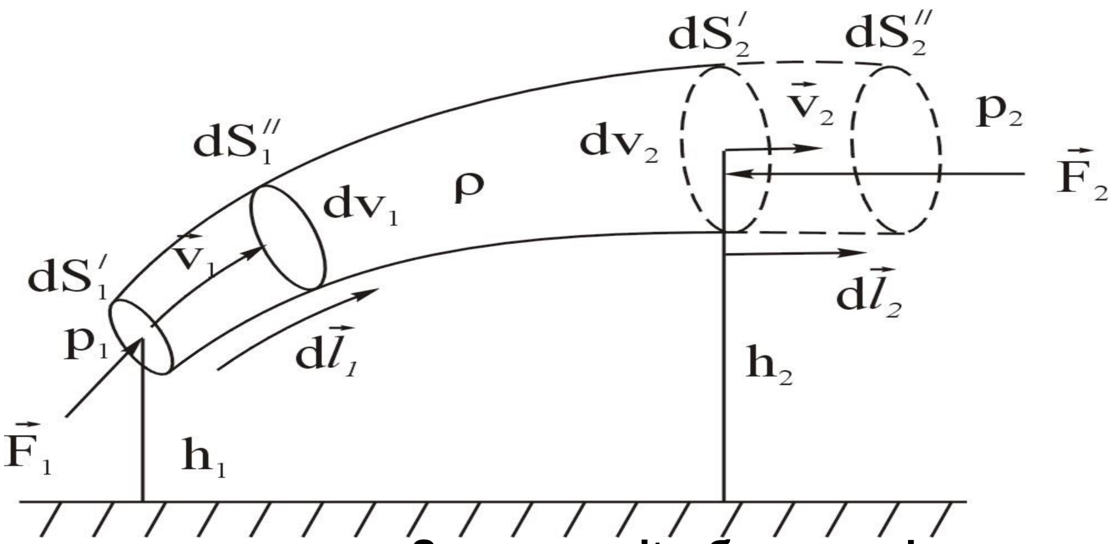
ВЪПРОС 11. УРАВНЕНИЕ НА БЕРНУЛИ И СЛЕДСТВИЯ ОТ НЕГО: разходомер на течности, всмукващо действие на флуид (пулверизатор), формула на Торичели, тръба на Пито. ЗАКОНИ ЗА ЗАПАЗВАНЕ ПРИ ФЛУИДИТЕ

I. УРАВНЕНИЕ НА БЕРНУЛИ

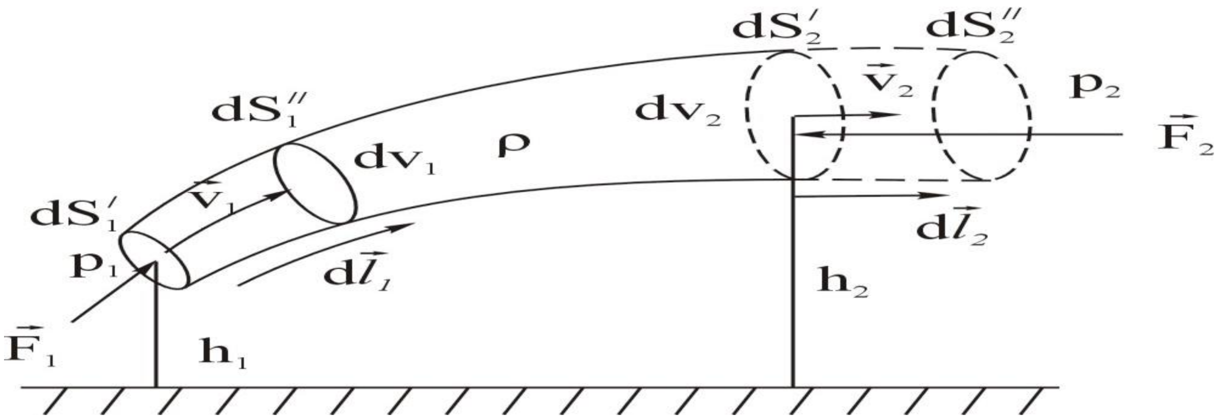
1.Постановка на задачата: Имаме несвиваем и идеален (липсват вътрешни сили на триене) флуид, който се движи стационарно в полето на силата на тежестта в безкрайно тънка токова тръба. Интересува ни изменението на механичната енергия на флуида при това движение.



2.Характеристика на движението: За време dt обема на флуида в тръбата ще се премести така че сечението dS_1' ще се премести в положение dS_1'' изминавайки път dl_1. аналогично $dS_2' \rightarrow dS_2''$ изминавайки път dl_2. Поради уравнението на непрекъснатост обемите заключени между двойките сечения ще са равни $dV_1 = dV_2$. dl_1 и dl_2 са толкова малки че във всеки от обемите на всяка частица може да се препише една и съща скорост, височина и налягане. Преместването на обемите се дължи на разликата в силите на нормален натиск в краищата на токовата тръба.

От теоремата за изменение на пълната механична енергия имаме:

$$\Delta E = A_{нк}^{вън}$$



а/механичната енергия

$$E_1 = \frac{dm_1 v_1^2}{2} + dm_1 g h_1 =$$

$$= \frac{dS_1 dl_1 \rho v_1^2}{2} + dS_1 dl_1 \rho g h_1$$

$$E_2 = \frac{dm_2 v_2^2}{2} + dm_2 g h_2 =$$

$$= \frac{dS_2 dl_2 \rho v_2^2}{2} + dS_2 dl_2 \rho g h_2$$

$$\Delta E = \frac{dS_2 dl_2 \rho v_2^2}{2} + dS_2 dl_2 \rho g h_2 - \frac{dS_1 dl_1 \rho v_1^2}{2} - dS_1 dl_1 \rho g h_1$$

б/работата на неконсервативните сили:

$$A_{нк}^{вън} = A_1 + A_2 = \vec{F}_1 . d\vec{l}_1 + \vec{F}_2 . d\vec{l}_2 = F_1 dl_1 \cos 0 + F_2 dl_2 \cos 180 =$$

$$= p_1 dS_1 dl_1 - p_2 dS_2 dl_2$$

Приравнявайки изразите от а/ и б/ и вземайки в предвид, че $dl_1 dS_1 = dl_2 dS_2$

След елементарни преобразования имаме:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} +_2 \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1$$

$\frac{\rho v^2}{2}$ - динамично налягане на флуида (играе роля на кинетична енергия на движещия се флуид). Ако флуидът е в покой, динамичното му налягане е 0.

$\rho g h$ – хидростатично налягане на флуида (играе роля на потенциална енергия на флуида в полето на силата на тежеста).

p – статично налягане на флуида (играе роля на потенциална енергия на взаимодействието във флуида).

УРАВНЕНИЕ НА БЕРНУЛИ: Сумата от динамичното, хидростатичното и статичното налягане на идеален, несвиваем флуид, движещ се стационарно в полето на силата на тежестта, за всяка точка от токовата линия е константа. Поотделно тези налягания могат да се изменят, но така че тяхната сума да остава винаги постоянна.

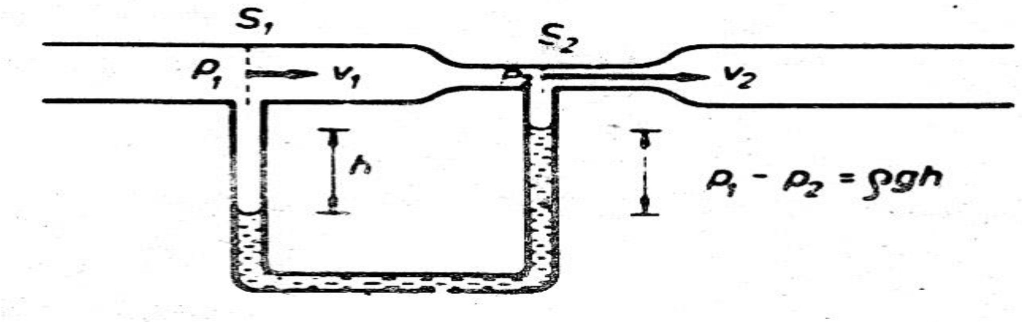
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = const$$

Ако токовата тръба е хоризонтална: $h_1 = h_2$, тогава уравнението на Бернули е:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = const$$

II. СЛЕДСТВИЯ ОТ УРАВНЕНИЕТО НА БЕРНУЛИ

1. Разходомер: Уред за измерване на разхода на течност (гориво) в литри:



а/ устройство: хоризонтална тръба със ясно изразено стеснение по средата. Прикрепен U- образен манометър за измерване на разликата в статичните налягания

б/ анализ на действието: $\frac{\rho_T v_2^2}{2} + p_2 = \frac{\rho_T v_1^2}{2} + p_1$

$$p_1 = p_2 + hg\rho_U$$

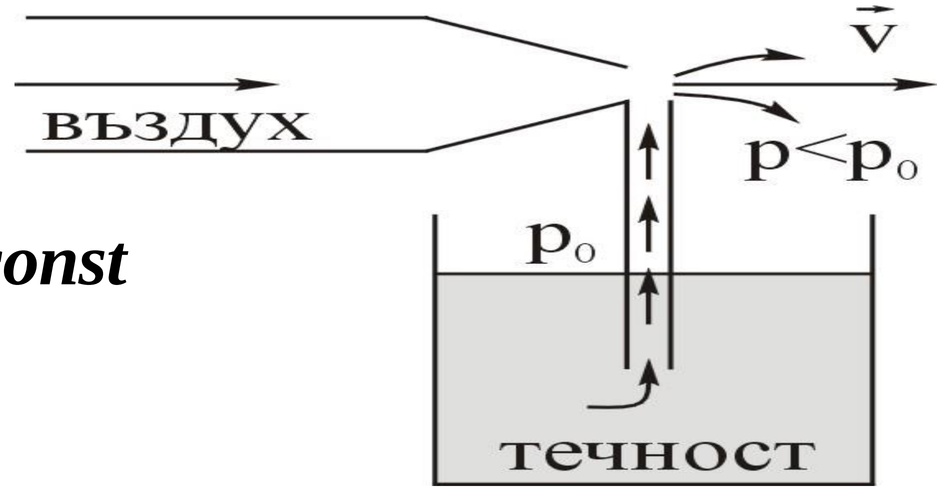
$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Изразяваме скоростта V_1: $v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2\rho_U h}{\rho_T (S_1^2 - S_2^2)}}$

За дебита Q (количеството флуид преминал през напречното сечение на единица време

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\rho_U h}{\rho_T (S_1^2 - S_2^2)}}$$

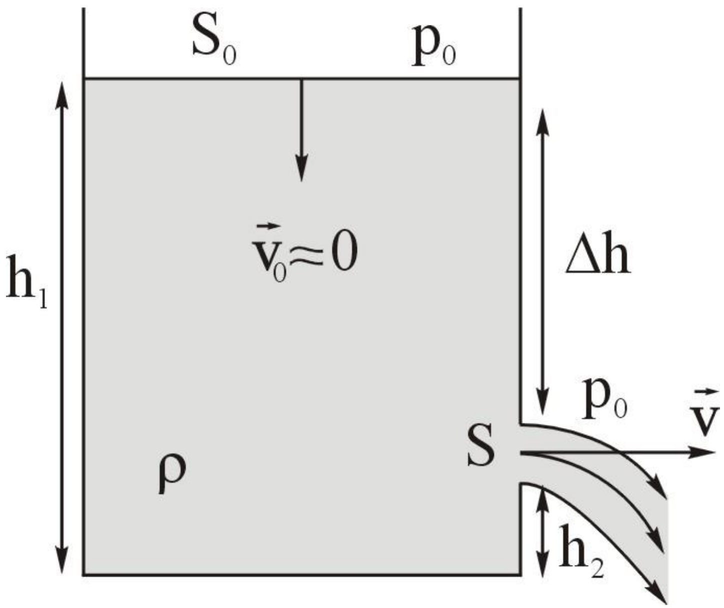
2. **Пулверизатор**



$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = const$$

От уравнението на Бернули за хоризонтална тръба при изходно сечение което е толкова малко, че $p<p_o$ Това води до засмукване на течност от казанчето.

3. **Формула на Торичели** (изтичане на течност през тесен отвор в съд)



Искаме да определим скоростта на изтичане на течността през отвор със сечение S, като $S \ll S_0$

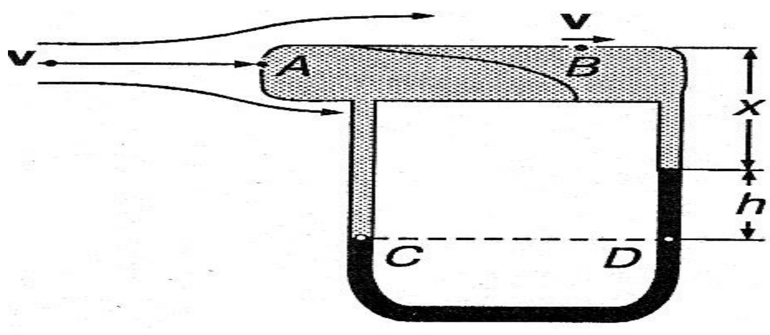
$$\frac{\rho v_0^2}{2} + \rho g h_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2$$

$$S_0 v_0 = S_1 v \qquad v_0 = \frac{S_1}{S_0} v \qquad \frac{S}{S_0} \ll 1 \rightarrow v_0 \approx 0$$

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2g\Delta h}$$

Това наричаме ФОРМУЛА НА ТОРИЧЕЛИ

4. Тръба на Пито: служи за измерване на скорости на движения на тела във флуиди (самолети, кораби и др)

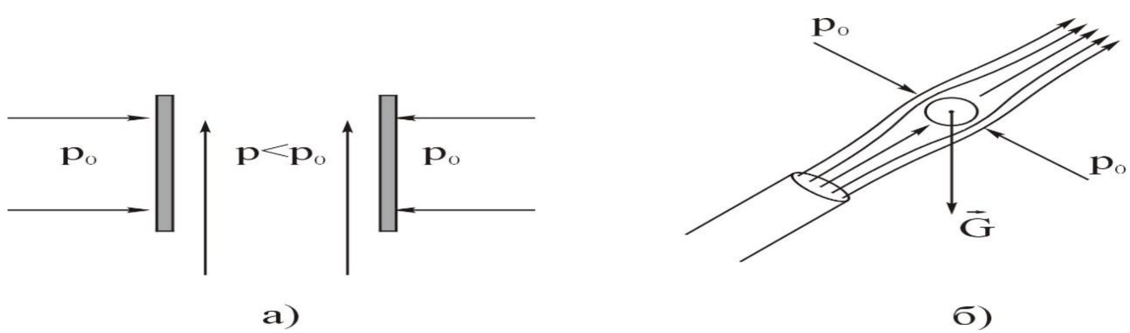


а/ принцип на действие: Скоростта на флуида в точката А е нула $V_A=0$. В точката В скоростта на флуида определя относителната скорост на тялото във флуида.

$$\frac{1}{2}\rho_{\Phi} v^2 + p_B = p_A$$ От чертежа е ясно $$gh\rho_U + p_B = p_A$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\rho_U h}{\rho_{\Phi}}}$$

5. Някои интересни примери за размисъл:

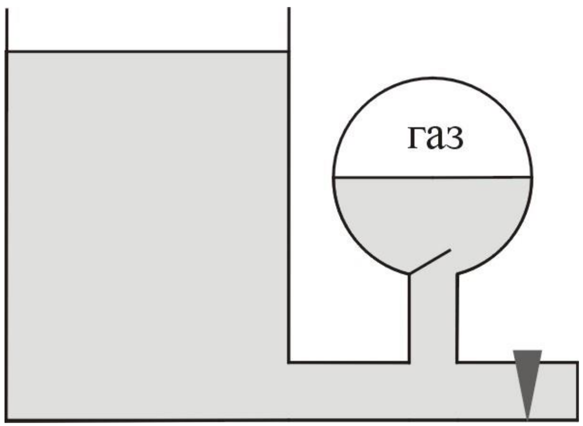


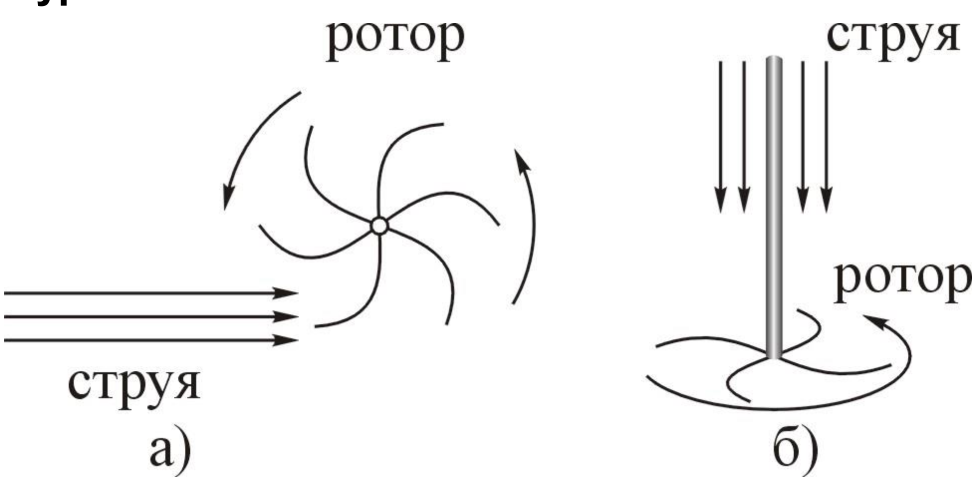
III. ЗАКОНИ ЗА ЗАПАЗВАНЕ ПРИ ФЛУИДИТЕ

1. **ЗЗМЕ: При движението на един идеален, несвиваем флуид, на който действат само обемни консервативни сили, е в сила законът за запазване на механичната енергия. Той гласи: За всеки обем от флуида:**

$$E = E_к + E_p = const.$$

а/ Примери: хидравличен удар, хидродинамична кавитация, хидравличен акумулатор на налягане, водни турбини.



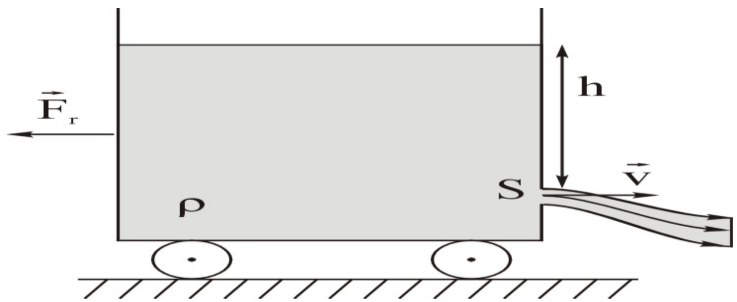


Мощността на водния източник е равна на: $P = \rho Q_V H$ **където Q е обемният поток, а H е разликата във височините в началото и края (водния пад).**

2. **Закон за запазване на импулса:** Всеки движещ се обем флуид притежава импулс приложен в центъра на масите му:

$$\vec{p} = \int_V \vec{v} dm = \int_V \rho \vec{v} dV$$

Ако системата е затворена то импулса на системата за запазва. От него следва, че ако импулсът на даден обем от флуида се измени с Δp , то със същата стойност, но с обратен знак трябва да се промени импулса на друг обем от флуида.



$$\Delta\vec{p} = \Delta m\vec{v} = \rho\Delta V\vec{v} = \rho S\Delta l\vec{v} = \rho Sv\Delta t\vec{v}$$

$$\vec{F}_r = -\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = -\rho Sv\vec{v}$$

$$F_r = \rho Sv^2 = 2gh\rho S$$

3.ЗЗМИ: Всеки движещ се обем от флуида притежава момент на импулса:

$$\vec{M} = \int_V \vec{r} \times d\vec{p} = \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho dV$$

За затворена система от флуид е в сила **законът за запазване момента на импулса**. От него следва, че ако моментът на импулса на даден обем от флуида се измени, то същото изменение, но с обратен знак трябва да получи друг обем от флуида.