

**ТРЕПТЕЛИВИ ДВИЖЕНИЯ.
СВОБОДНИ ХАРМОНИЧНИ
ТРЕПТЕНИЯ НА МЕХАНИЧНА
СИСТЕМА.**

**СКОРОСТ, УСКОРЕНИЕ И
ЕНЕРГИЯ НА ХАРМОНИЧНО
ТРЕПТЯЩА СИСТЕМА.**

**ПРИМЕРИ ЗА ХАРМОНИЧНИ
ТРЕПТЕНИЯ - МАХАЛА.**

I. ТРЕПТЕЛИВИ ДВИЖЕНИЯ

1. **Определения:** Процес в които се наблюдава някаква форма на повтаряемост наричаме трептене. В зависимост от физическата природа на процеса говорим за: механични, електромеханични, електромагнитни и др.
2. Ако физичните величини които характеризират процеса са повтарят през равни интервали време говорим за ПЕРИОДИЧНИ ТРЕПТЕНИЯ.
3. ПЕРИОД: Най-малкия интервал от време през който се повтарят всички физични величини който описват даденото механично трептене: бележи се с T [s]. Това е времето за едно пълно трептене.
4. ЧЕСТОТА: Броя трептения които извършва системата на единица време:

$$\nu = \frac{1}{T} [s^{-1}]; [Hz]$$

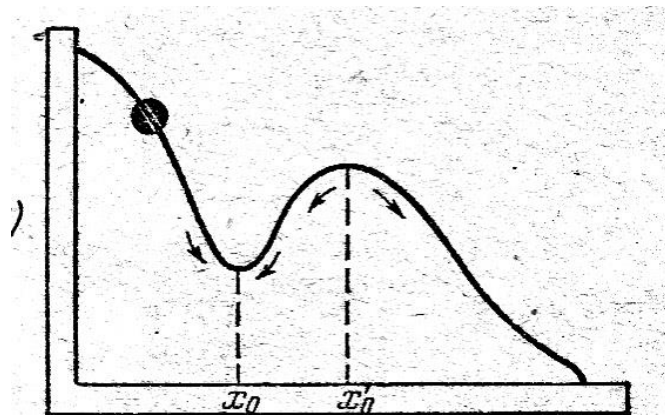
5. Функциите които описват такива процеси трябва да са периодични функции по времето т.е.

$$f(t) = f(t + T)$$

6. **Условие за равновесие:** Когато сумата от всички действащи върху едно тяло сили е нула и неговата кинетична енергия е нула казваме, че тялото се намира в равновесие.

7. Видове равновесия:

а/ устойчиво равновесие: ако отклоним тялото от равновесното положение то възниква въртеща сила, която е насочена към равновесното положение.



б/ неустойчиво равновесие: Ако отклоним тялото то се отдалечава от равновесното си състояние и въртеща сила няма.

8. Механизъм на възникване на механично трептене:

1/ отклоняваме тялото от неговото устойчиво равновесие и го оставяме само на себе си

2/ под действието на въртещата сила то започва да се движи ускорително към равновесното си положение.

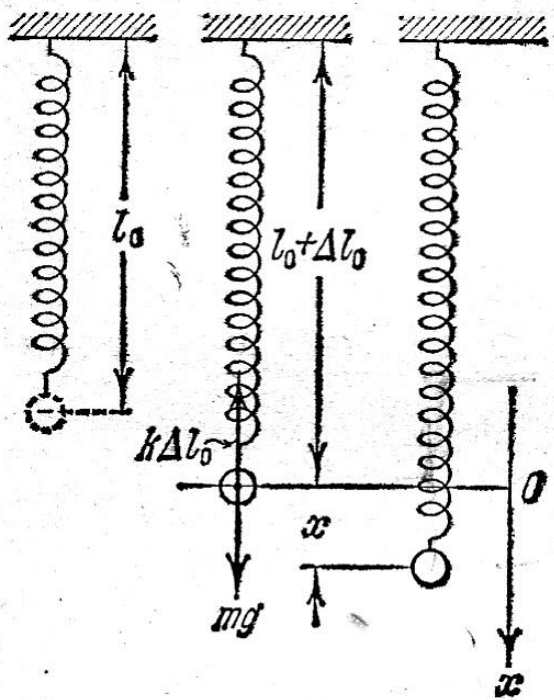
3/ достигайки до равновесното си положение то има максимална скорост и по инерция го подминава (генериран запас от кинетична енергия)

4/ тялото продължава да се движи, но вече закъснително, защото въртещата сила действа в посока обратна на движението му.

5/ след изчерпване на запаса от кинетична енергия тялото спира, обръща посоката на движението си и започва да се движи ускорително под действието на въртещата сила. **(ТАКА ЗАПОЧВА ЕДНО ПОВТАРЯЩО СЕ ДВИЖЕНИЕ ОКОЛО РАВНОВЕСНОТО СЪСТОЯНИЕ)**

II. ХАРМОНИЧНИ ТРЕПТЕНИЯ

1. Хармонична сила и хармонично трептение: **КОГАТО ВРЪЩАЩАТА СИЛА НА ЕДНО ПЕРИОДИЧНО ТРЕПТЕНИЕ ЗАВИСИ ЛИНЕЙНО ОТ ОТМЕСТВАНЕТО НА ТЯЛОТО ОТ РАВНОВЕСНОТО ПОЛОЖЕНИЕ СИЛАТА СЕ НАРИЧА ХАРМОНИЧНА, А ТРЕПТЕНИЕТО НАРИЧАМЕ ХАРМОНИЧНО.**
2. Уравнение за движение на едномерно хармонично трептение:



1/ равновесно положение:

$$G = F_{el} = mg = k\Delta l_0$$

2/ отклоняваме системата на разстояние x от равновесното положение:

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x)$$

$$F = -kx$$

т.е. връщащата сила е хармонична и посоката и е към равновесното положение

3/ Втория закон на Нютон има вида:

$$m\ddot{x} = -kx$$

2. Решение на уравнението.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

собствена кръгова честота на трептение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Това уравнение описва свободно хармонично трептение с една степен на свобода, когато не действат сили на дисипация (триене).

Търсим решения от вида:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

A_0 -амплитуда на трептенията която съответства на максималното отклонение на тялото от равновесното положение.

$\omega t + \varphi_0$ -фаза на трептение. Определя големината и посоката на отклонение на частицата от равновесното положение.

φ_0 - начална фаза. Определя началното положение от което тялото започва своето движение.

След заместваме получаваме следното характеристично уравнение:

$$A_0(-\omega^2 - \omega_0^2) = 0 \rightarrow \omega = \omega_0$$

Уравнението на движение има следния окончателен вид

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A_0 и φ_0 се определят от началните условия:

$$x_0 = A_0 \cos \varphi_0$$

$$v_0 = -\omega_0 A_0 \sin \varphi_0$$

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\varphi_0 = \text{artg}\left(-\frac{v_0}{x_0 \omega_0}\right)$$

Период на трептението: Функцията която описва отклонението на частицата от равновесното и положение е периодична с период 2π т.е

$$\omega_0(t + T) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi$$

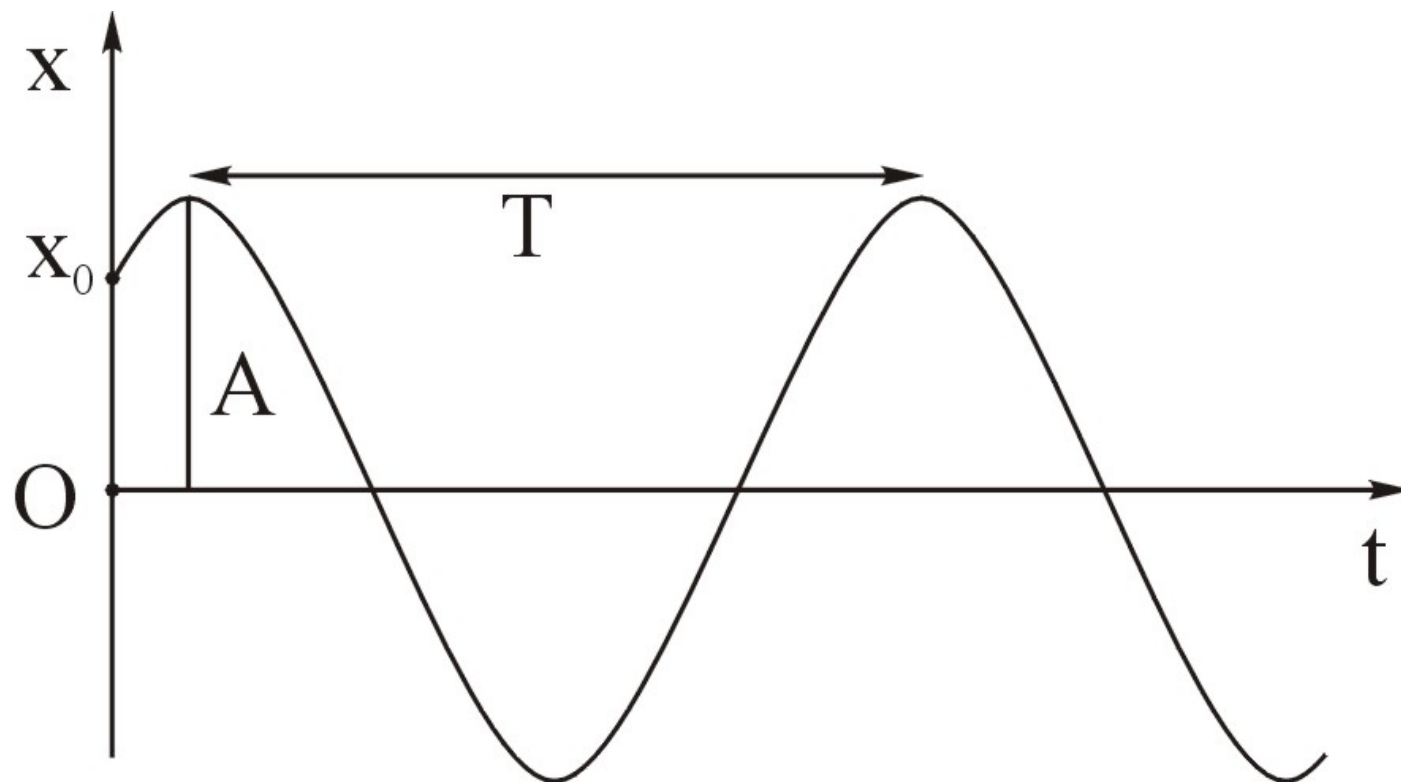
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow \nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

кръговата честота определя броя на трептенията за 2π секунди

3. Графично представяне на хармонично трептение.



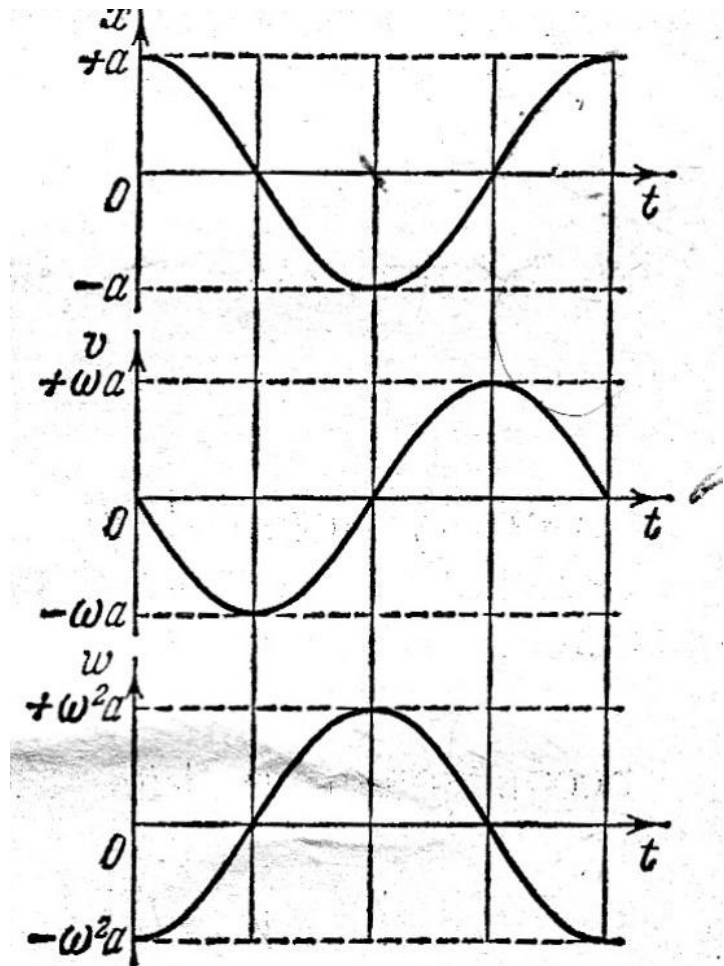
III. СКОРОСТ, УСКОРЕНИЕ И ЕНЕРГИЯ НА ТРЕПТЯЩО ТЯЛО

1.Скорост и ускорение: След диференциране на уравнението за движението имаме:

$$x = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

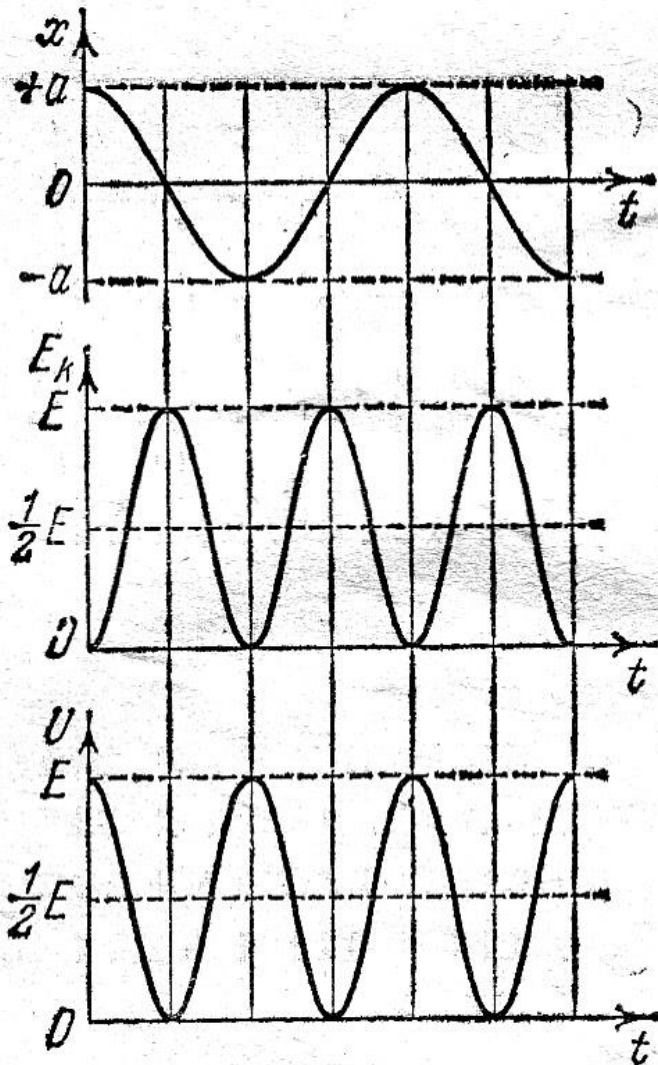
$$v = \dot{x} = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ = \omega_0 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \ddot{x} = -\omega_0^2 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ = \omega_0^2 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$



2. Енергия на трептене.

а/ връщащата сила е консервативна, защото зависи само от разстояние и позволява въвеждането на потенциална енергия:



$$F = -\frac{dE_p}{dx} \rightarrow E_p(x) = \int F(x)dx + C =$$
$$= -\int kx + C = \frac{kx^2}{2} + C$$
$$E_p(0) = 0 \rightarrow C = 0$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA_o \cos^2(\omega_o t + \varphi_o)}{2}$$

б/ кинетична енергия:

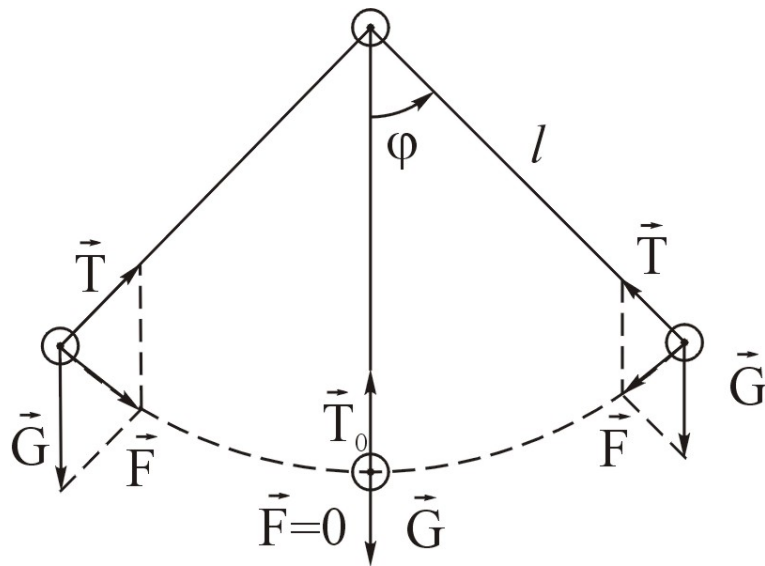
$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_o^2 A_o^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi_o)}{2}$$

в/ пълна механична енергия:

$$E = E_k + E_p = \frac{m\omega_o^2 A_o^2}{2}$$

IV. ПРИМЕРИ ЗА МЕХАНИЧНИ ТРЕПТЯЩИ СИСТЕМИ

1. Математическо махало: на тънка безтегловна нишка с дължина l е закачено тяло с маса m . Отклоняване на махалото на малък ъгъл φ .



а/ вързаща сила: тангенциалната компонента силата на тежестта към траекторията:

$$F = -mg \sin \varphi$$

б/ имаме въртене на тялото около точката на окачване на махалото

$$I \ddot{\varphi} = N_{G_\tau}$$

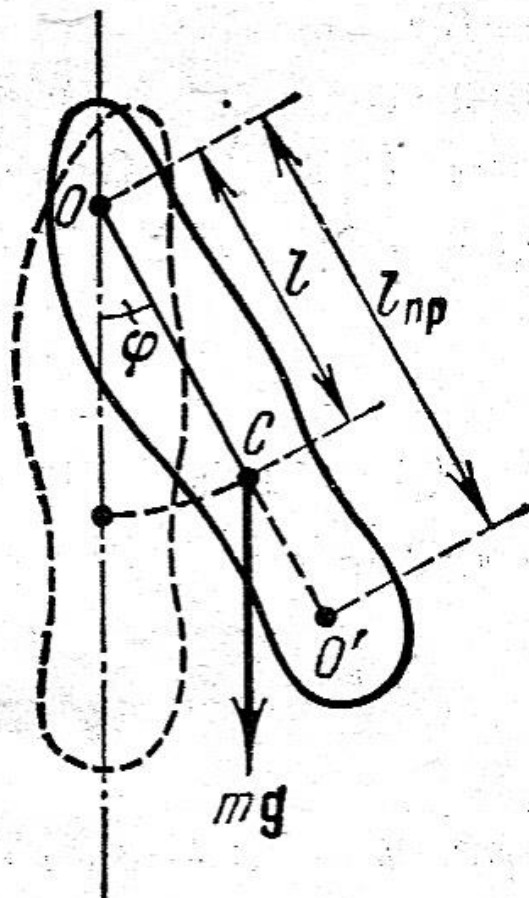
$$I = ml^2 ; N_{G_\tau} = -mgl \sin \varphi$$

в/ уравнение на движение: $ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi = -mgl \varphi$

$$l \ddot{\varphi} + g \varphi = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

2. Физическо махало: Това е твърдо тяло с маса m , което може да се люлее свободно в полето на силата на тежестта около точка на окачване O , несъвпадаща с центъра на масите му C .



$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi = -mgl\varphi$$

$$I\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Нека:

$$l_{np} = \frac{I}{ml}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{np}}{g}}$$

Физичното махало може да се замени с математическо с дължина на нишката l_{np}