ЗАТИХВАЩИ ТРЕПТЕНИЯ. АМПЛИТУДА И ЧЕСТОТА НА ЗАТИХВАЩИТЕ ТРЕПТЕНИЯ. ВРЕМЕ НА РЕЛАКСАЦИЯ. ЛОГАРИТМИЧЕН ДЕКРЕМЕНТ НА ЗАТИХВАНЕ. Q-ФАКТОР. АПЕРИОДИЧНИ ТРЕПТЕНИЯ.

I. ЗАТИХВАЩИ ХАРНОМИЧНИ ТРЕПТЕНИЯ

Разгледаните в предната тема трептения се извършваха само под действието на връщащата сила и за тях ние установихме, че при тях амплитудата е постоянна и те могат да се определят като незатихващи свободни трептения. В природата това не е така и на една такава система действат сили на дисипация (сили на триене или челно съпротивление). Тези сили са неконсервативни и тяхната работа води до изменение на механичната енергия на системата като тя се трансформира в друг вид (топлинна, вътрешна и др.) Експеримента показва, че такова движение с времето затихва което се изразява в постоянно намаляване на амплитудата му.

1.Определение: Периодично движение, което поради сили на дисипация затихва във времето, наричаме свободно хармонично затихващо трептение.

2.Характер на движението: Поради действащите сили на дисипация, които извършват отрицателна работа за всеки следващ период от време механичната енергия намалява. Намалява амплитудата и максималната скорост на тялото когато преминава през равновесното положение. Когато връщащата сила е хармонична, амплитудата и скоростта се променят, така че периода на трептенето не се променя.

3. Уравнение на движение: При неголеми скорости на движението дисипационните сили зависят линейно от скоростта т.е

$$F_{дис} = -r\dot{x}$$

Знака "-" определя факта че тези сили са винаги обратно на вдижението на тялото; r-коефицент на триене.

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Въвеждаме следните означения:

$$2\beta = \frac{r}{m}$$ **наричаме затихване** $$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Окончателно уравнението за движение придобива вида:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Търсим решение от вида:

$$x = Ce^{-\lambda t} \rightarrow \dot{x} = -\lambda Ce^{-\lambda t} \rightarrow \ddot{x} = \lambda^2 Ce^{-\lambda t}$$

Заместваме и получаваме следното характеристично уравнение:

$$\lambda^2 - 2\beta\lambda + \omega_o^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$$

Нека $\omega_o >> \beta \rightarrow \lambda_{1,2} = \beta \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$

Тогава за x(t) имаме:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right], където \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$$

Т.е. честотата на затихващите трептения е по малка от собствената честота.

След преработка имаме:

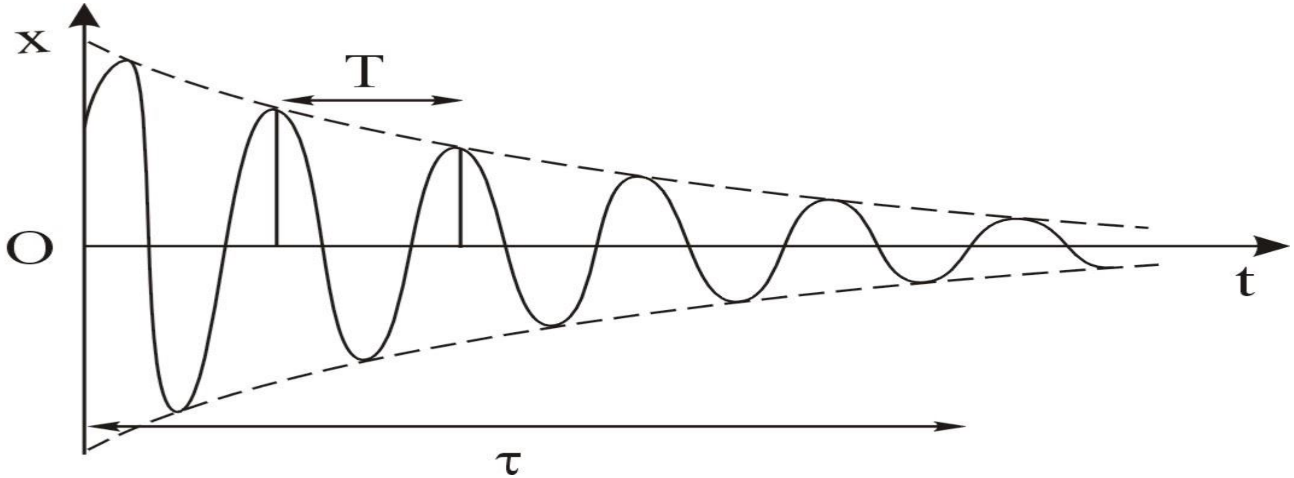
$$x(t) = A_o e^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi_o)$$

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t - \varphi_o)$$

$$A(t) = A_o e^{-\beta t}$$

II. АМПЛИТУДА И ПЕРИОД НА ЗАТИХВАЩО ТРЕПТЕНИЕ

1.Амплитуда: Вече има зависимост от времето. Амплитудата намалява по експоненциален закон:



2.Период:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}$$

ИЗВОД: **ПРИ ЗАТИХВАЩИТЕ ТРЕПТЕНИЯ ПЕРИОДА НАРАСТВА, А ЧЕСТОТА НА ТРЕПТЕНИЯ НАМАЛЯВА В СРАВНЕНИЕ С НЕЗАТИХВАЩИТЕ ТРЕПТЕНИЯ И ТОВА ЗАВИСИ ОТ ЗАТИХВАНЕТО Т.Е. ОТ СИЛИТЕ НА ДИСИПАЦИЯ**

III. ВРЕМЕ ЗА РЕЛАКЦАЦИЯ

В предната точка ние отбелязахме,че амплитудата на затихващите трептения намалява по експоненциален закон

$$A(t) = A_o e^{-\beta t}$$

Определение: Времето за което амплитудата на затихващото трептение нама-лява *е* пъти наричаме време на релаксация и се бележи с *τ.*

$$A(\tau) = A_o e^{-1} \rightarrow e^{-1} = e^{-\beta \tau}$$

Окончателно:

$$\beta\tau = 1 \rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$$

Времето за релаксация определя бързината на намаляване на амплитудата. Обикновено се смята, че след изтичане на времето на релаксация системата е прекратила движението си и се намира в равновесното си състояние.

IV. ЛОГАРИТМИЧЕН ДЕКРЕМЕНТ НА ЗАТИХВАНЕ. Q-ФАКТОР

1. Декремент на затихване: Това е отношението между две съседни амплитуди, отличаващи се по време, равно на един период T на трептението. Характеризира скоростта с която намалява амплитудата:

$$\Lambda = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

2. Логаритмичен декремент на затихване: обикновено се работи с величината λ, наречена логаритмичен декремент на затихване:

$$\lambda = \ln \Lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

3. Q-фактор(доброкачественост на трептящата система): $Q = \dfrac{\pi}{\lambda}$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi \frac{\tau}{T} = \pi N_\tau$$

където: $N_\tau = \dfrac{\tau}{T}$

Броя на трептенията които извършва системата за времето на релаксация

4. Енергия на затихващи периодични трептения

$$E(t) = E_k + E_p = \frac{1}{2} mA(t)^2 \omega^2 = \frac{1}{2} mA_0^2 \omega^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}$$

Нека да диференцираме по времето

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_o e^{-2\beta t} \rightarrow \frac{dE}{dt} = -2\beta E$$

Изразходваната механична енергия за преодоляване на силите на дисипация за един период е:

$$-\Delta E = 2\beta T E$$

Запаса от енергия в даден момент от трептението е:

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{\pi}{2\pi(\beta T)} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{Q}{2\pi}$$

Т.е. запаса от енергия е пропорционален на Q-фактора.

V. АПЕРИОДИЧНИ ТРЕПТЕНИЯ

С нарастване на затихването в системата периода на трептене нараства и при $\beta=\omega_o$, Т клони към безкрайност т.е движението престава да бъде периодично. ТОГАВА ГОРОВИМ ЗА АПЕРЕОДИЧНИ ТРЕПТЕНИЯ.

При тях дисипативните сили са толкова големи, че трептенето не може да се довърши.