ВЪПРОС 16.
ПРИНУДЕНИ ТРЕПТЕНИЯ. ФОРМУЛА ЗА АМПЛИТУДАТА И ФАЗАТА НА ТРЕПТЕНИЯ В СТАЦИОНАРЕН РЕЖИМ. РЕЗОНАНС. РЕЗОНАНС ПРИ СТРОИТЕЛНИ КОНСТРУКЦИИ.

I.ПРИНУДЕНИ ТРЕПТЕНИЯ

1. Определение: Когато в една трептяща система действат сили на дисипация то с времето трептенето затихва. За да накараме системата да трепти с еднаква амплитуда ние постоянно трябва да внасяме енергия от вън компенсирайки загубите. ТАКИВА ТРЕПТЕНИЯ НАРИЧАМЕ ПРИНУДЕНИ
2. Най-лесно принудени трептения можем да възбудим и поддържаме с действието на външна переидична сила с кръгова честота ω.

$$F^{вън} = F_0 \cos \omega t$$

3. Механизъм на възникване на трептенията:

   а/ външната сила извършва положителна работа върху системата и компенсира загубите причинени от силите на дисипация.

   б/ в начало системата поради инертността си започва да трепти като постепенно увеличава амплитудата си (начално установяване на трептенията), след което амплитудата и честотата на принудените трептения стават постоянни и не се изменят с времето.

   в/ честота на трептение на системата е равна на честотата на периодично действащата сила.

   г/ фазата на трептенията може да не съвпада с фазата на външната сила.

4. Диференциално уравнение описващо принудено трептение под действие на периодична външна сила.

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx + F_0 \cos\omega t$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_o \cos\omega t$$ **Където** $$f_o = \frac{F_0}{m}$$

Това е едно линейно, нехомогенно ОДУ от втори ред. Неговото решение е сума от общото решение на линейното, хомогенно ОДУ:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow x_{лх}(t) = A_o e^{-\lambda t} \cos\omega_з t$$

Където $\omega_з = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$

И едно частно решение на нехомогенното ОДУ.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_o \cos\omega t$$

Уравнението записваме в комплексни променливи:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_o e^{i\omega t}$$

Като търсим решение от типа:

$$\hat{x} = \hat{a} e^{i\omega t}$$

Не е задължително да се възпроизведе този слайд. След двукратно диференциране и заместване в уравнението имаме:

$$\hat{a}\left(-\omega^2 + i2\beta\omega + \omega_o^2\right) = f_0 \rightarrow \hat{a} = \frac{f_o}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\beta\omega}$$

$$\hat{x} = \frac{f_o}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\beta\omega} e^{i\omega t}$$

Нека $(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\beta\omega = \rho e^{i\varphi}$ като $y = \rho\cos\varphi; z = \rho\sin\varphi$

$$y = (\omega_o^2 - \omega^2); z = 2\beta\omega$$

Полагаме:

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

Тогава получаваме:

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

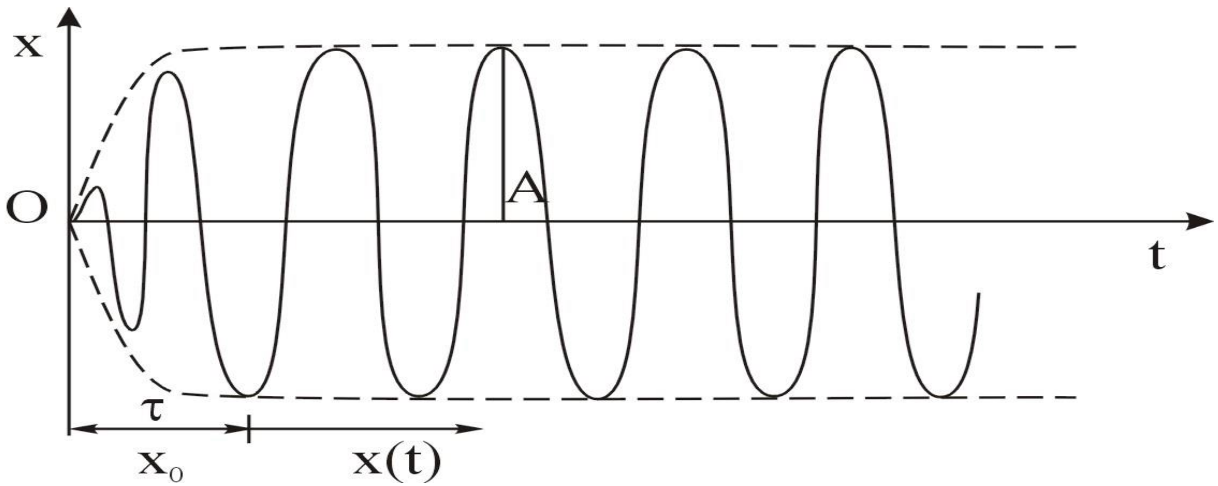
За частното решение имаме:

$$x_{чр} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

където: $\varphi = arctg\dfrac{2\beta\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)}$

Окончателно общото решение има вида:

$$x(t) = x_{лх} + x_{чр}$$



а/ режим на начално установяване на трептенията:

б/ стационарен режим с постоянна амплитуда и фаза:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad \varphi = arctg\,\frac{2\beta\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

II. РЕЗОНАНС

1. От казаното до тук е ясно, че амплитудата зависи от честотата на външната сила. При определена стойност на външната честота НАРЕЧЕНА РЕЗОНАНСНА амплитудата има максимална стойност.

ЯВЛЕНИЕ ПРИ КОЕТО АМПЛИТУДАТА НА ПРИНУДЕНИТЕ ТРЕПТЕНИЯ СТАВА МАКСИМАЛНА ПРИ ЧЕСТОТА НА ВЪНШНАТА СИЛА РАВНА НА РЕЗОНАНСНАТА НАРИЧАМЕ РЕЗОНАНС.

2. Определяне на резонансната честота: За да бъде амплитудата максимална е необходимо знаменателя на уравнението за амплитудата да е минимален.

Намираме първата производна на знаменателя по ω и приравняваме на нула:

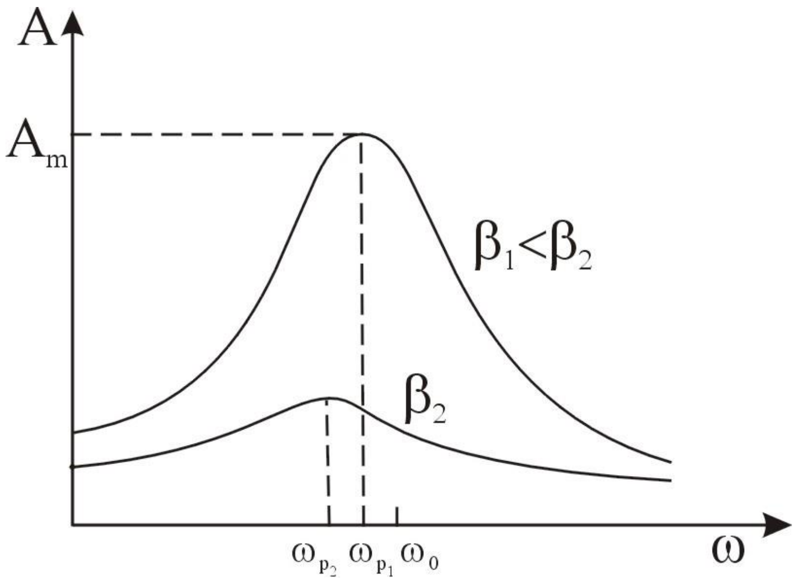
$$\frac{d}{d\omega}(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 = 2\beta^2 - \omega_o^2 + \omega^2 = 0$$

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

Извод:

$$\omega_0 > \omega_з > \omega_{рез}$$

3. Изследване и графично представяне на зависимостта на амплитудата от честотата на принудените трептения:



$$ако: \omega = 0 \rightarrow A(\omega = 0) = \frac{F_o}{m\omega_o^2} = \frac{F_0}{k} = x_0$$

$$ако: \omega \rightarrow \infty \rightarrow A(\omega \rightarrow \infty) = 0$$

$$ако: \omega = \omega_{рез} \rightarrow A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}$$

$$ако: \beta = 0 \rightarrow A_{рез} = \infty$$

$$ако: \beta \rightarrow \infty \rightarrow A_{раз} = 0$$

1/ При $\omega=0$ това съответства на сила отклоняваща системата от равновесното и положение на X_0.

2/ При бързо променяща се външна сила системата не може да реагира на бързите промени и усреднено по продължителен интервал от време действащата сила е нула. Това е следствие от инертността на системата.

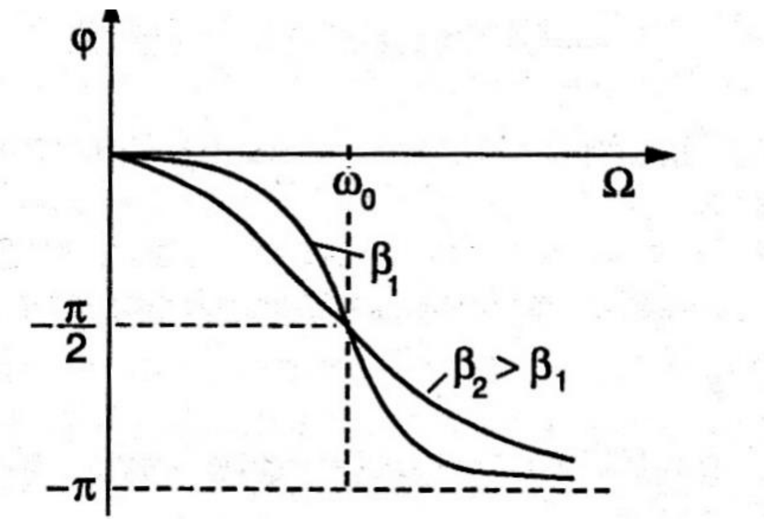
3/ При резонансната честота амплитудата нараства многократно по отношение на началното отклонение от равновесното положение. Системата е особено възприемчива при външни въздействие и ефективно поглъща енергия. Особено когато затихването β е малко.

Изразено в термините на трептенията:

$$\frac{A_{рез}}{A(\omega=0)}=\frac{A_{рез}}{x_o}=\frac{F_0}{2m\beta\omega_0}\cdot\frac{m\omega_o^2}{F_o}=\frac{\omega_0}{2\beta}=\frac{2\pi}{2\beta T}=\frac{\pi}{\lambda}=Q$$

Т.е. Q-фактора определя колко пъти нараства амплитудата на трептене спрямо началното отклонение на системата при началното и разтрептяване

4.Изследване на фазата



$$ако: \omega=0\rightarrow\varphi(\omega=0)=0$$

$$ако: \omega\rightarrow\infty\rightarrow\varphi=(\omega\rightarrow\infty)=\pi$$

$$ако: \omega=\omega_o;\beta=0\rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$ако: \beta\neq0\rightarrow\varphi<\frac{\pi}{2}$$

$$ако: \beta_2>\beta_1\rightarrow\varphi_2<\varphi_1$$

ИЗВОД: ПРИНУДЕНИТЕ ТРЕПТЕНИЯ ИЗОСТАВАТ ПО ФАЗА ОТ ВЪНШНАТА СИЛА

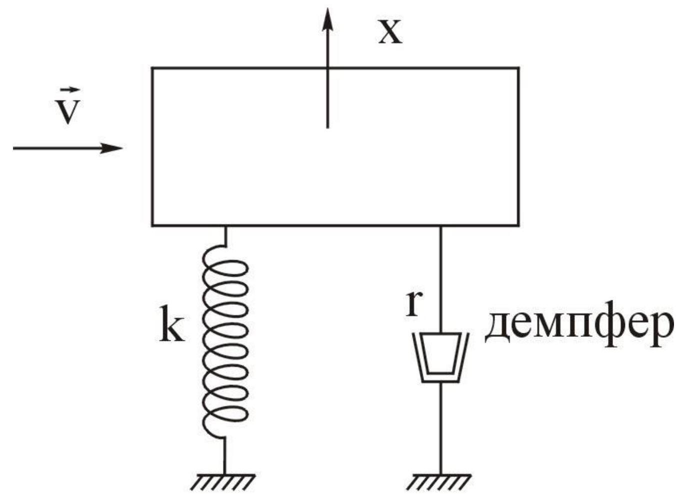
Пример за резонанс 4:30 мин

III. РЕЗОНАНС ПРИ СТРОИТЕЛНИ КОНСТРУКЦИИ

Резонанс при строителни конструкции. *Строителните конструкции ка-то сгради и др. са подложени на ветрови натоварвания от обтичащия ги въз-душен поток. Това натоварване има постоянна компонента (която вече раз-гледахме) и динамична, обикновено периодично променлива компонента, полу-чаваща се поради пулсациите на вятъра.*

При сгради и съоръжения, високи над 40m и такива с голяма дължина, ка-то висящи покрития, мостове, естакади и др. (т.е. тела, които имат голямо челно съпротивление, лош обтекаем профил на напречното сечение и период на собствените трептения $T_o > 0,25s$*), съгласно нормите за проектиране не мо-же да се пренебрегне динамичната съставяща на ветровото натоварване, дъл-жаща се на пулсациите на скоростния напор и на откъсване на течението с последващо вихрообразуване. Спазването на това условие се налага поради въз-можността да настъпи динамична и еластична реакция, създаваща неустой-чивост на строителната конструкция – резонансни или самовъзбуждащи се трептения.*

Тези трептения се апроксимират със следната моделна опростена еластична система, показана на фиг.49.3. Тя е съставена от маса М, пружина



фиг. 49. 3

с коефициент на еластичност к, която характеризира еластичните свойства на конструкцията и обуславя еластичната сила, връщаща я към равновесното положение и демпфер с коефициент на вискозно демпфериране r, *който характеризира енергообмена между системата и околната среда и обуславя пропорционална на скоростта съпротивителна сила. Поведението на такава система при натоварването й с периодично изменяща се сила:* $F(t) = F_0 \cos\omega t$ *се описва с уравнението на принудените трептения:*

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx + F(t)$$

Много от свободните конструкции, намиращи се във въздушен поток, могат да бъдат сведени до подобна система, подложена на действието на външни нестационарни аеродинамични сили. Конструкцията реагира на тези сили като механичен филтър, възприемайки енергията само на онази област от спектъра на възбуждащите сили, чиито честоти ω *са в непосредствена близост до собствените честоти (основната* ω_0 *и хармоничните) на системата.*

Анализът на строителните конструкции може да бъде описан в качествено отношение както следва:

1. $\omega < \omega_0$ – конструкцията следва действието на външната сила квазистатично;

2. $\omega >> \omega_0$ – конструкцията не следва действието на външната сила;

3. $\omega \approx \omega_0$ – конструкцията реагира силно на външната сила с резонансно нарастване на амплитудата на трептенията.

Точно третият случай представлява резонанса при строителните конструкции, който задължително трябва да бъде избегнат. За тази цел се изменят строителните материали и размерите и формите на конструкциите, така че честотата на променливата компонента на ветровото натоварване да бъде значително различна от резонансната честота на конструкцията.