ВЪПРОС 18.
ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ.
СТОЯЩИ ВЪЛНИ.
УРАВНЕНИЕ НА СТОЯЩА ВЪЛНА.
СТОЯЩИ ВЪЛНИ В СТРОИТЕЛНИ КОНСТРУКЦИИ.

I. ИНТЕРФЕРЕНЦЯ.

а) Дефиниция. Явлението, при което амплитудите на резултантните трептения на всички точки от средата не зависят от времето, се нарича интерференция.

При интерференция някои точки от средата постоянно трептят с максимална амплитуда, други – с минимална амплитуда, а трети – с амплитуда в интервала между максималната и минималната. Получава се устойчива с времето интерференчна картина на усилване и отслабване на трептенията в определени точки от средата, което води до стационарно с времето преразпределение на енергията, пренасяна от вълните.

б) Условия за интерференция. За да може амплитудата А на резултантното трептение да не зависи от времето t в случая, разгледан по-горе, трябва да са изпълнени две условия:

1. Честотите на двете вълни да са равни:

$$\nu_1 = \nu_2$$

Тогава явната зависимост от времето във формулата за А изчезва. При това и дължините на двете вълни ще бъдат равни ($\lambda_1 = \lambda_2$), защото скоростите на вълните са еднакви в дадената среда, а също така и техните вълнови вектори.

2. Източниците на вълните да трептят с постоянна във времето фазова разлика:

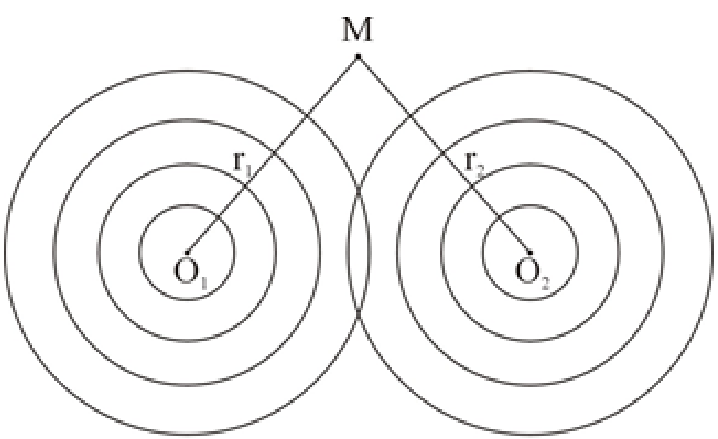
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$$

Тогава се премахва и неявната зависимост от времето във формулата за А.

Вълни, които отговарят на тези две условия, се наричат кохерентни вълни.

в) Условия за усилване и отслабване на трептенията при интерференция.

За простота ще разгледаме случая, когато в дадена изотропна и хомогенна среда едновременно се разпространяват две сфе-рични хармонични вълни, които създават трептения на точките от средата, из-вършващи се в едно направление. Ще разгледаме точка M от средата (фиг.55.1), намираща се на разстояние r_1 от източника на първата вълна и на разстояние r_2 от източника на втората вълна.



фиг. 55. 1

Ако: $$r_2 - r_1 = 2\mathbf{n}\frac{\lambda}{2}$$

четно число половинки дължина на вълната, то в точката има максимална амплитуда: A = $A_1 + A_2$. n – цяло число

Ако: $$r_2 - r_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

точки от средата, за които разликата в разстоянията до двата източника е нечетно число половинки дължина на вълната, трептят с минимална амплитуда A = $|A_1 - A_2|$.

II. СТОЯЩА ВЪЛНА

Стояща вълна. Това е частен случай на интерференция, получаващ се при наслагването на две плоски хармонични вълни с еднакви амплитуди, разпространяващи се в противоположни направления (по оста Ох и обратно на Ох).

1. Постановка на задачата: Разглеждаме две хармонични вълни разпространяващи се в противоположни посоки по оста Ох

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx)$$

Отклонението на частица от средата с координата х в момента t е суперпозиция от отклоненията които са предизвикали вълните достигайки до нея

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\,[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)]$$

Окончателно имаме:

$$\xi = 2A\cos kx . \cos\omega t$$

Това е резултантна вълна с честота ω и амплитуда която зависи само от мястото но не и от времето, т.е. в средата се получава една стационарна картина. Ще имаме места, където трептенията ще се наслагват и амплитудата ще нараства и места, където трептенията ще се гасят и средата ще остане не смутена.

2. **Определение на стояща вълна:** **ВЪЛНА ЧИЕТО РАЗПРОСТРАНЕНИЕ В МАТЕРИАЛНА СРЕДА СЕ ОПИСВА С УРАВНЕНИЕТО** $\xi = 2A\cos kx.\cos\omega t$ **НАРИЧАМЕ СТОЯЩА.**

3.Анализ на стояща вълна:

а/ определяне местата на максимална и минимална стойност на амплитудата.

$$A^* = \left|2A\cos kx\right| = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$$

Амплитудата е максимална

$$A^* = 2A$$

За

$$\cos kx_{max} = 0;\pi;2\pi;....n\pi$$

$$kx_{max} = 2n\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x_{max} = 2n\frac{\pi}{2}$$

$$x_{max} = 2n\frac{\lambda}{4};\_n = 0,1,2,3..........$$

Амплитудата е минимална

$$A^* = 0$$

За

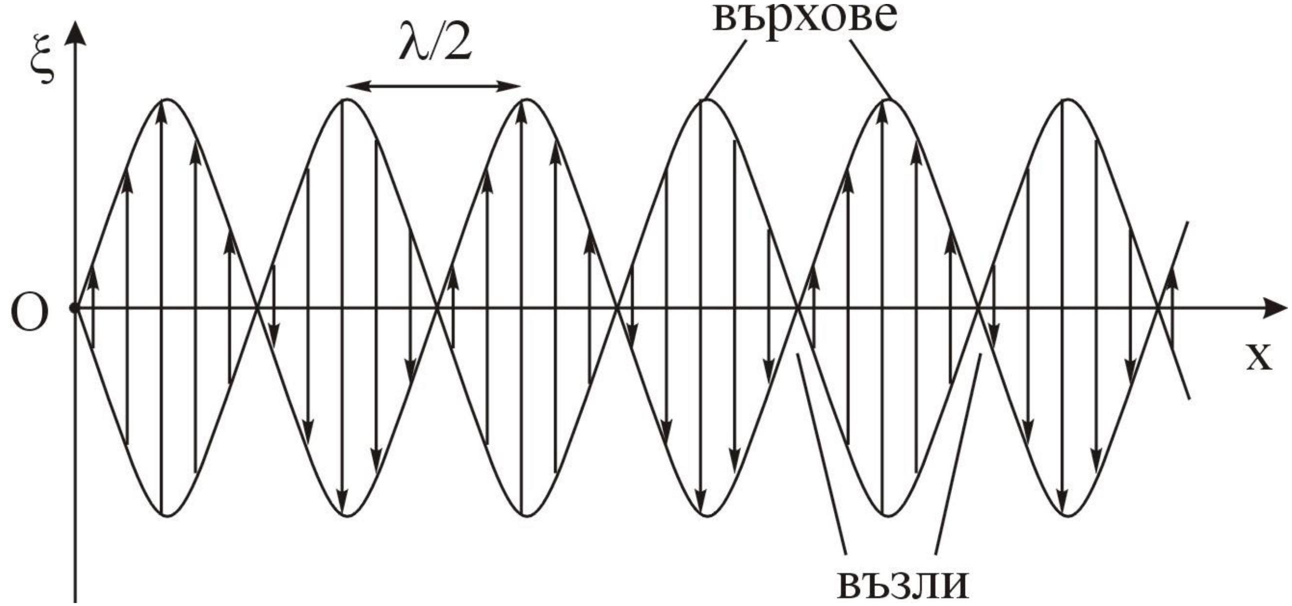
$$\cos kx_{min} = 0;\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};.....(2n+)\frac{\pi}{2}$$

$$kx_{min} = 2(n+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x_{min} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x_{min} = (2n+1)\frac{\lambda}{4};\_n = 0,1,2,3..........$$

ИЗВОД: **КОГАТО x Е ЧЕТНО ЧИСЛО ЧЕТВЪРТ ВЪЛНИ АМПЛИТУДАТА Е МАКСИМАЛНА A^*=2A, КОГАТО x Е НЕЧЕТНО ЧИСЛО ЧЕТВЪРТ ВЪЛНИ АМП-ЛИТУДАТА Е МИНИМИЛНА A^*=0.**

г/ графичен вид на амплитудата на стоящата вълна:



- **възли: местата, в които амплитудата е нула.**
- **върхове: местата, в които амплитудата е максимална.**
- **разстоянието между два съседни възела и два съседни върха е половин дължина на вълната (λ/2)**
- **разстоянието между два съседни възела и врък е четвърт дължина на вълната (λ/4).**
- **при преминаване през възел амплитудата сменя знака си, което означава, че от двете страни на даден възел частиците трептят в ПРОТИВОФАЗА.**
- **между два възела частиците от средата трептят СИНФАЗНО.**
- **частиците от възлите остават неподвижни през цялото време.**

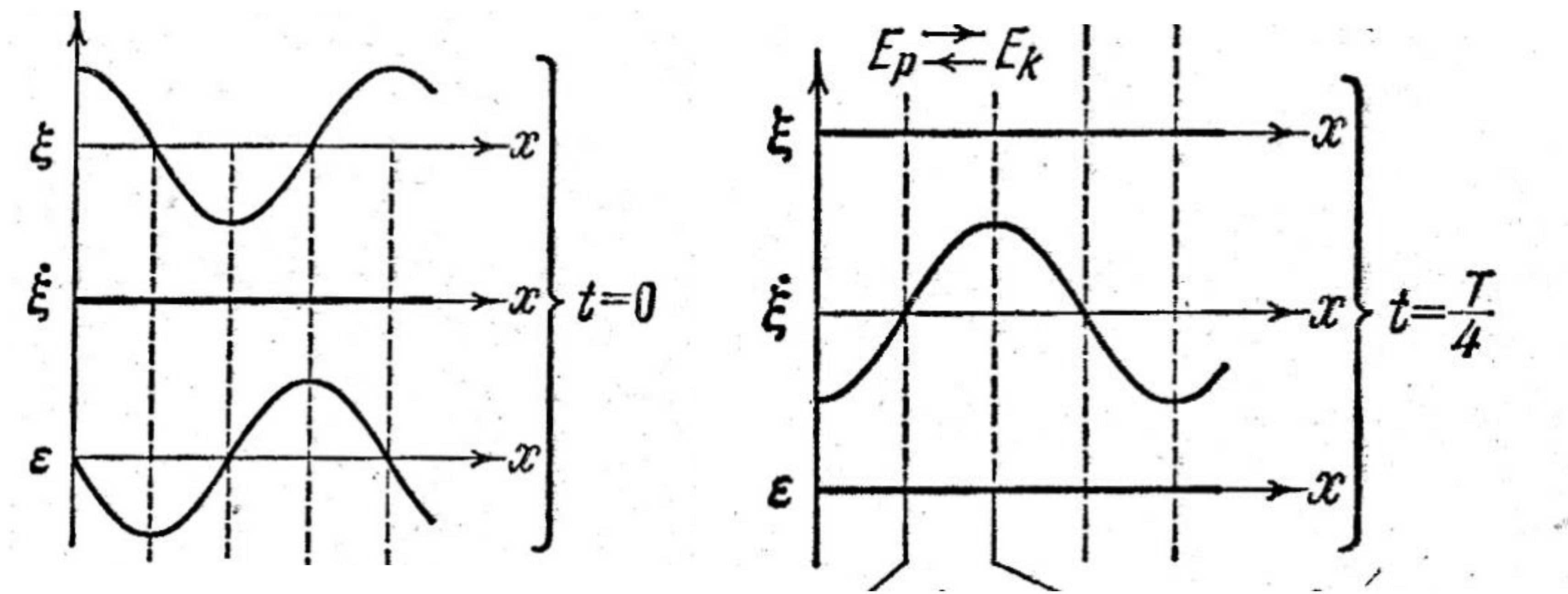
д/ скорост на вълната и деформация на средата:

$$\xi = 2A\cos kx.\cos\omega t$$ **отместване**

$$\dot{\xi} = -2\omega A\cos kx.\sin\omega t$$ **скорост**

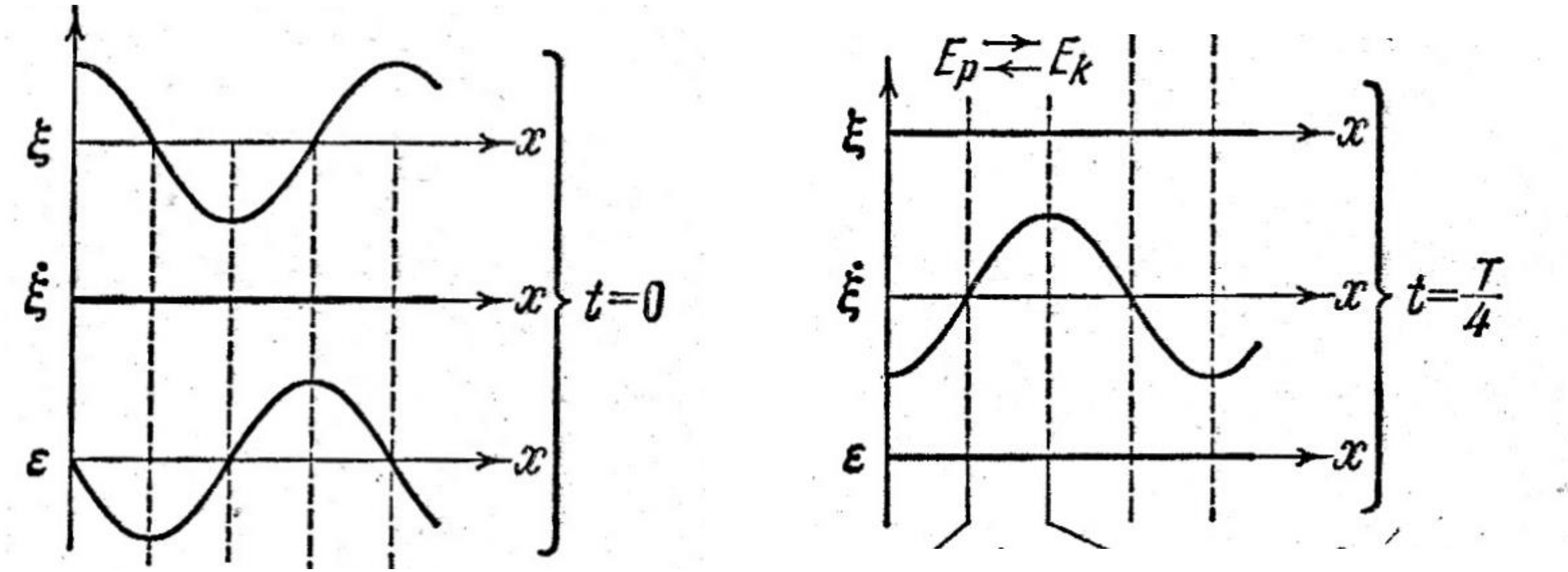
$$\varepsilon = \frac{\partial\zeta}{\partial x} = -2kA\sin kx.\cos\omega t$$ **деформация**

Ще изчертаем графиките на трите функции за t=0 и t=(T/4)



ОСНОВНИ ИЗВОДИ:

- Там където отклонението и деформацията имат максимални стойности скоростта е нула и обратно.



- местата от средата, в които имаме възли (върхове) в отклонението имаме и възли (върхове) на скоростта.

- местата от средата, в които имаме възли (върхове) в отклонението имаме и върхове (възли) на деформацията.

- в моментите t=0 и t=(T/2) всички точки достигат максималното си отклонение ЕДНОВРЕМЕННО, само че в противоположни посоки

- в моментите t=(T/4) и t=(3T/4) всички частици ЕДНОВРЕМЕННО преминават през равновесното си положение.

-Стоящите вълни не пренасят енергия Тъй като стоящите вълни са суперпозиция от две бягащи вълни, които се движат в противоположни посоки. ЕНЕРГИЯТА, КОЯТО СЕ РАЗПРОСТРАНЯВА ОТ ЕДНАТА ВЪЛНА, СЕ ВРЪЩА ОБРАТНО ОТ ДРУГАТА. ОБЩИЯ ПОТОК НА ЕНЕРГИЯТА Е НУЛА.

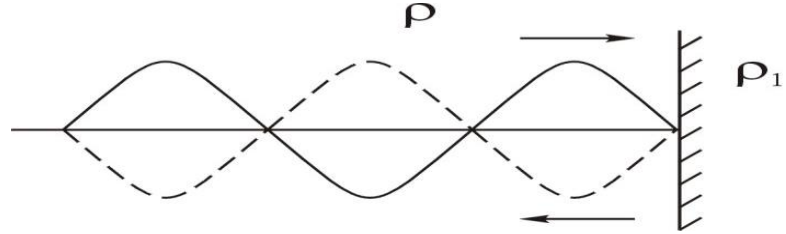
ИЗВОД: ПРИ СТОЯЩА ВЪЛНА ВСИЧКИ ЧАСТИЦИ ТРЕПТЯТ ВЪВ ФАЗА КАТО ЕДНОВРЕМЕННО ДОСТИГАТ ДО МАКСИМАЛНОТО СИ ОТКЛОНЕНИЕ И ЕДНОВРЕМЕННО ПРЕМИНАВАТ ПРЕЗ РАВНОВЕСНОТО СИ ПЛОЖЕНИЕ.

4. Условия за поличаване на стояща вълна:

СТОЯЩА ВЪЛНА МОЖЕ ДА СЕ ПОЛУЧИ ПРИ ОТРАЖЕНИЕ НА ХАРМОНИЧНА ВЪЛНА ОТ ПРЕГРАДА. ПАДАЩАТА И ОТРЗЕНАТА ВЪЛНА ИМАТ ЕДНАКВА ЧЕСТОТА И АМЛПИТУДА.

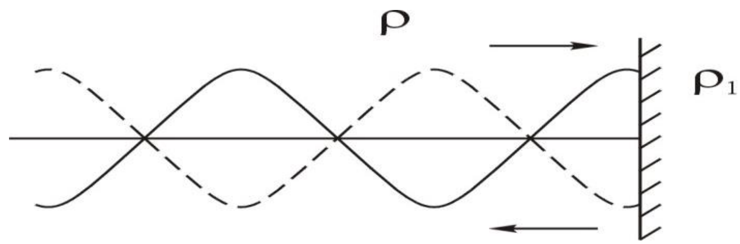
а/ако точките от отразяващата повърхност са неподвижни $\rho_{ст} > \rho_{ср}$

се получава възел на стоящата вълна. Падащата и отразената вълна са в противофаза, което води до загуба на половин дължина на вълната.



б/ Ако точките от отразяващата повърхност са подвижни $\rho_{ст} < \rho_{ср}$

то се получава връх на стоящата вълна и няма изменение на фазата.

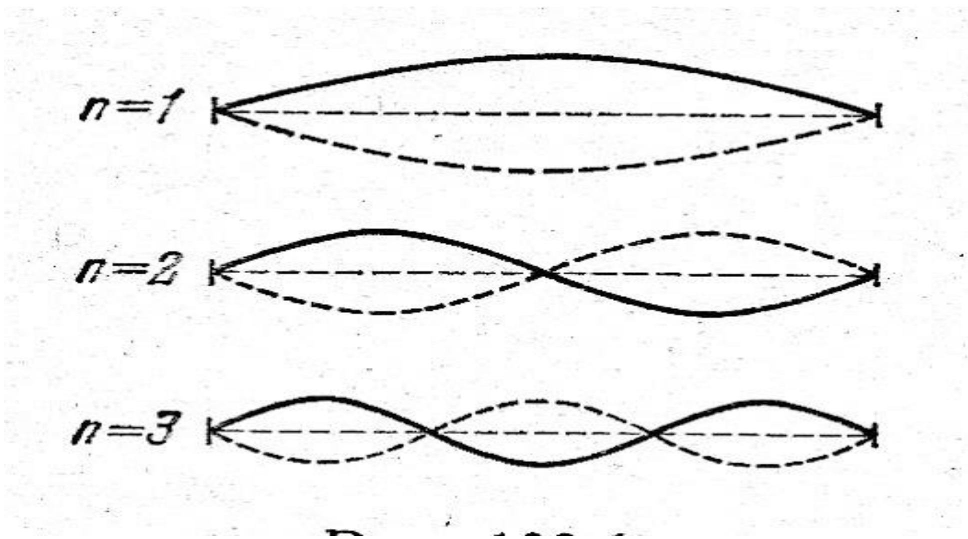


III. СТОЯЩИ ВЪЛНИ В СТРОИТЕЛНИ КОНСТРУКЦИИ

Имат значение за резонансните свойства на строителните съпръжения.

1. Метален прът в различни точки на окачване:

а/ неподвижно закрепен в двата си края:



$$\frac{\lambda}{2} = L$$

$$2\frac{\lambda}{2} = L$$

$$3\frac{\lambda}{2} = L$$

Получаваме следната рекурентна зависимост:

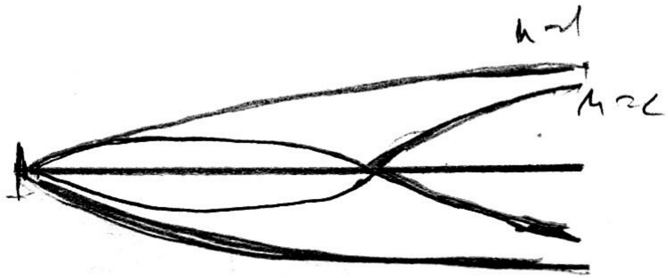
$$\lambda_n = 2\frac{L}{n} \rightarrow \upsilon_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}$$

т.е могат да се възбуждат вълни с точно определени дължини на вълните (дискретен спектър)

υ_0 **основна честота,**

$2\upsilon_0, 3\upsilon_0, \ldots.$ **висши хармоники**

б/ неподвижно закрепен в единия край



$$n = 1 \rightarrow \frac{\lambda}{4} = L$$

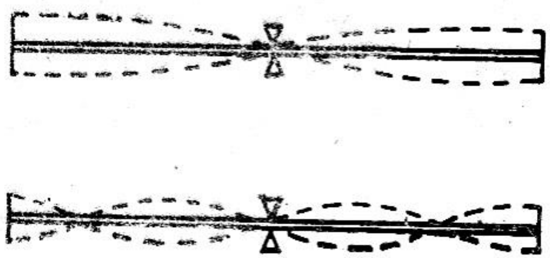
$$n = 2 \rightarrow 3\frac{\lambda}{4} = L$$

$$n = 3 \rightarrow 5\frac{\lambda}{4} = L$$

Рекурентна зависимост:

$$\lambda_n = 4\frac{L}{(2n+1)} \rightarrow \upsilon_n = \frac{v}{\lambda_n} = (2n+1)\frac{v}{4L}$$

в/ неподвижно закрепен в средата:



$$n = 1 \rightarrow \frac{\lambda}{4} = \frac{L}{2}$$

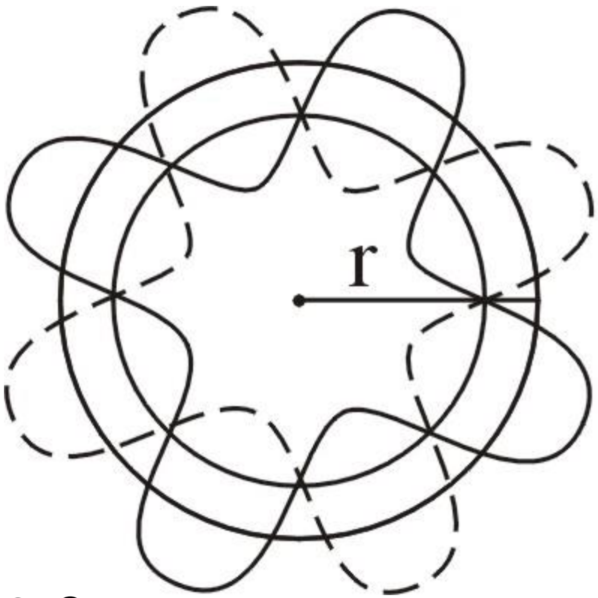
$$n = 2 \rightarrow 3\frac{\lambda}{4} = \frac{L}{2}$$

$$n = 3 \rightarrow 5\frac{\lambda}{4} = \frac{L}{2}$$

Рекурентна зависимост:

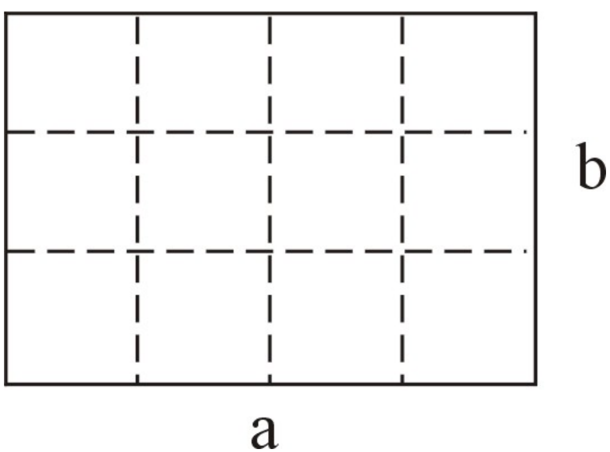
$$\lambda_n = 2\frac{L}{(2n+1)} \rightarrow \upsilon_n = \frac{v}{\lambda_n} = (2n+1)\frac{v}{2L}$$

2. Тороид: По тороида да се нанасят цели дължини на вълните



n=4 $\lambda = \dfrac{2\pi r}{n} \rightarrow n = 1,2,3.......$

3. Стоящи вълни в правоъгълна плоча. За стояща вълна в една плоча имаме следното уравнение:



$$\xi = 2A\cos k_x x \cos k_y y \cos \omega t$$

Налагаме гранични условия неподвижна плоча :

$$\xi(x=0, y=0, t) = 0 \rightarrow \xi = 2A\cos \omega t$$

$$\xi(x=a, y=0, t) = 0 \rightarrow \xi = 2A\cos k_x a \cos \omega t$$

$$\xi(x=0, y=b, x=t) = 0 \rightarrow \xi = 2A\cos k_y b \cos \omega t$$

$$\xi(x=0, y=b, x=t) = 0 \rightarrow \xi = 2A\cos k_x a \cos k_y b \cos \omega t$$

Така се получават следните ограничения върху k_x и k_y

$$k_x a = n_1\pi \rightarrow k_x = \pi\frac{n_1}{a} \qquad k_y b = n_2\pi \rightarrow k_y = \pi\frac{n_2}{b}$$

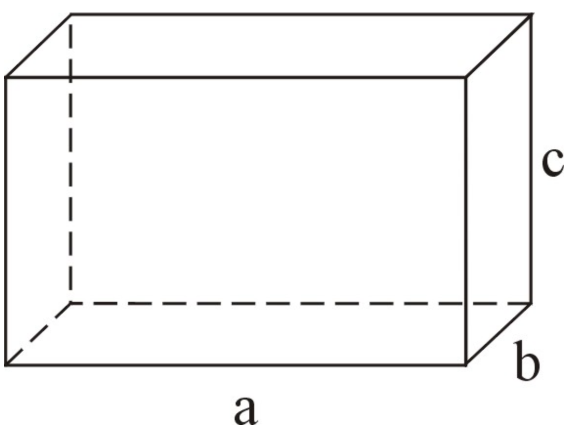
Тогава:

$$k = \pi\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}}$$

$$\upsilon = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \upsilon = \frac{vk}{2\pi} \rightarrow \upsilon = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}}$$

Тук възможните честоти не се отнасят като кратни честоти

4. Стоящи вълни в паралелепипед.



$$\nu = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}+\frac{n_3^2}{c^2}}$$

След като се появява безкраен набор от честоти няма ли да възниква почти винаги механичен резонанс?

Отговорът е следният: Енергията на всяка възбудена стояща вълна е пропорционална на квадрата на честотата й: $E \sim \nu^2$. Или енергетичният спектър на енергиите на собствените трептения има вида: $E_0 < E_1 < E_2 < E_3$ Тоест енергиите на висшите моди са значително по-големи от енергиите на нисшите моди. Тези енергии се получават от действието на външните периодични сили. За да се получат собствени трептения с големи честоти са необходими огромни външни сили. Ето защо в реалните случаи се възбуждат само основната и нисшите моди на трептения, което ограничава възможния спектър от честотите. Следователно основна роля при резонанса играят основната и нисшите честоти на трептения на конструкцията.