

## Задачи

1) Решете системата в зависимост от параметъра.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 18 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = \mu \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 15x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

2) Дадени са точките  $A(2,-1,2)$ ;  $B(0,1,-2)$ ;  $C(1,2,0)$  и  $D(1,-1,-1)$  в ортогонална координатна система.

а) Пресметнете обемът на пирамидата  $ABCD$ .

б) Напишете уравнението на правата  $DD_1$ , ако  $D_1$  е медицентърът на триъгълника  $ABC$ .

3) В кои точки графикът на функцията  $f(x) = x + \sin 2x$  има хоризонтална допирателна?

4) Дадена е матрицата  $A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & t & -3t \end{pmatrix}$  и функцията  $f(x) = 2x^2 - x + 5$ .

Решете уравнението  $f(A(t))=O$ , където  $O$  е нулевата матрица.

5) Дадени са точките  $A(0,-7,1)$ ;  $B(2,-1,2)$ ;  $C(3,1,1)$  и  $D(2,-1,4)$ .

а) Кръстосани ли са правите  $AC$  и  $BD$ ?

б) Пресметнете ъгълът между тези прави..

6) Пресметнете сумата  $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ .

7) Дадена е матрицата  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  и функцията  $f(x) = 2x^2 - x + 5$ .

Пресметнете  $f(A)$ .

8) Решете уравнението

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0.$$

9) Пресметнете  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$ .

10) Решете уравнението  $AX=B$ , ако  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

11) Дадени са точките  $A(0,-7,0)$ ;  $B(2,-1,1)$ ;  $C(3,0,1)$  и  $D(2,-1,3)$ .

а) Пресметнете обемът на многостена ABCD.

б) Пресметнете двустенният ъгъл между равнините ABC и BCD.

12) Пресметнете сумата  $P_n(x) = 1^1 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$ .

13) Решете уравнението  $AX=B$ , ако  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

14) Дадени са точките  $A(0,-7,0)$ ;  $B(2,-1,1)$ ;  $C(3,0,1)$  и  $D(2,-1,3)$  с координатите си в ортогонална система.

а) Пресметнете обема на многостена ABCD.

б) Пресметнете косинусът на двустенния ъгъл между равнините ABC и BCD.

15) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$ .

16) Решете уравнението  $AX=B$ , ако  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 02 \\ 00 \end{pmatrix}$ .

17) Дадени са точките  $A(0,-1,0)$ ;  $B(2,-1,1)$ ;  $C(3,0,1)$  и  $D(2,-1,3)$ .

а) Пресметнете обема на пирамидата ABCD.

б) Пресметнете косинусът на ъгъла между правите AC и BD.

18) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} \right)$ .

19) Дадена е матрицата  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  и функцията  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ .

Пресметнете  $f(A)$  и докажете, че  $f(A) = (A-E)(A-5E)$ .

20) Решете уравнението с две неизвестни

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & y & 3 \\ 1 & 2 & 3 & y \end{vmatrix} = 0$$

21) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$ .

22) Дадена е матрицата  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  и функцията  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ .

Пресметнете  $f(A)$  и докажете, че  $f(A) = (A - E)(A - 5E)$ .

23) Решете уравнението с две неизвестни

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & y & 3 \\ 1 & 2 & 3 & y \end{vmatrix} = 0$$

24) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$ .

25) Пресметнете ранга матрицата  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -2 & -5 \\ 8 & 8 & 12 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & \lambda & -9 & -25 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$  като функция на  $\lambda$ .

26) Дадени са точките  $A(2,3,1)$ ;  $B(4,1,-2)$ ;  $C(6,3,7)$  и  $D(-5,-4,8)$ . Пресметнете координатите на симетричната относно равнината  $ABC$  точка на  $D$ .

27) Докажете неравенствата  $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$ .

28) Решете системата

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = \mu \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + \lambda x_5 = 4 \end{cases}$$

29) Дадени са точките  $A(2,3,1)$ ;  $B(4,1,-2)$ ;  $C(6,3,7)$  и  $D(-5,-4,8)$ . Пресметнете координатите на симетричната относно равнината  $ABC$  точка на  $D$ .

30) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right)^{1-x}$ .

31) Решете системата

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 10 \end{cases}$$

32) Дадени са точките A(2,3,1); B(4,1,-2); C(6,3,7) и D(-5,-4,8). Пресметнете:

а) обемът на ABCD и

б) разстоянието между кръстосаните (първо, докажете, че са кръстосани) прави AC и BD.

33) Пресметнете производните до трети ред на функцията  $f(x) = (x^2 + 1)\arctg x$ .

34) Решете матричното уравнение  $(A-2E)X=A+E$ , където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

35) Дадени са точките A(2,3,1); B(4,1,-2); C(6,3,7) и D(-5,-4,8). Пресметнете:

а) дължината на височината на пирамидата ABCD през върха D.

б) ъгъла между кръстосаните (първо, докажете, че са кръстосани) прави AC и BD.

36) Пресметнете производната на функцията  $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$ . Кои са най – голямата и най – малка стойности на f(x) в интервала [-1,1].

37) Намерете всички матрици X, за които  $AX=XA$ , ако  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

38) Дадени са точките A(-2,3,0); B(1,1,-1); C(1,2,3) и D(3,2,1) с координатите си в ортогонална система.

а) напишете уравнението на равнината  $\mathcal{T}$  през A,B и C.

б) пресметнете разстоянието между D и  $\mathcal{T}$ .

39) Пресметнете  $f'(0)$ , ако  $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2012)$ .

40) Пресметнете ранга на матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & \lambda & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \text{ като функция на } \lambda.$$

41) Дадени са точките A(2,3,1); B(4,1,-2); C(6,3,7) и D(-5,-4,8). Пресметнете:

а) дължините на медианите на триъгълниците ABD (през върха A) и ABC (през B).

б) ъгълът между тези медиани.

42) Пресметнете производната на функцията  $f(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$ .

43) Решете матричното уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

44) Дадени са точките  $A(1,2,-1)$ ;  $B(-5,3,3)$ ;  $C(5,1,1)$ ;  $D(0,1,4)$  и  $M(4,2,2)$ . с координатите си в ортогонална система.

а) пресметнете  $\sphericalangle ACD$ .

б)  $V_{CDEM}$ , където  $E$  дели отсечката  $AM$  в отношение  $\frac{AM}{ME} = 3$ .

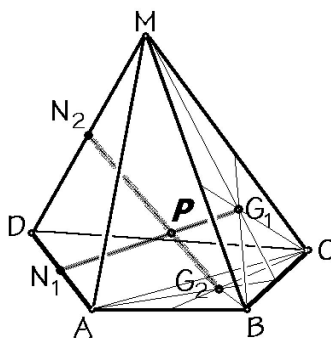
45) Пресметнете  $f'(0)$ , ако  $f(x) = \sin x \sin(x-1) \sin(x-2) \sin(x-3) \cdots \sin(x-10)$ .

46) Опишете всички матрици  $X$ , за които

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

47) Дадена е четириъгълната пирамида  $ABCDM$ . Докажете, че отсечките, които съединяват медицентъра на триъгълник от околна стена или основата със средата на “срещуположния” ръб се пресичат в една и съща точка, която ги

дели в отношение  $3/2$ . Например докажете, че  $\frac{N_1P}{PG_1} = \frac{N_2P}{PG_2} = \frac{3}{2}$ .



48) Определете броя на корените на уравнението  $e^x = ax^2$  в зависимост от параметъра  $a$ .

49) Решете матричното уравнение  $BX=A$ , където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = A^3 + 2A^2 + 4E$$

50) Дадени са точките A(1,2,-1); B(-5,3, 3); C(5,1,1) ; D(0,1,4) с координатите си в ортогонална система.

а) напишете уравнението на външната ъглополовяща на  $\sphericalangle ACD$ .

б) пресметнете тангенсът на двустенния ъгъл между равнините ABC и BCD.

51) Пресметнете границата  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+k} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$ .

52) Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

53) Дадени са точките A(1,2,-1); B(-5,3, 3); C(5,1,1) ; D(0,1,4) с координатите си в ортогонална система.

а) напишете уравнението на равнината BCD.

б) пресметнете разстоянието между кръстосаните прави AB и CD.

54) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x + 2} \right)^x$ .

55) Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & y \end{vmatrix}.$$

56) Дадени са точките A(0,2,-1); B(-1,3, 3); C(1,1,1) ; D(0,1,4) с координатите си в ортогонална система.

а) напишете уравнението на равнината BCD.

б) пресметнете синусът на ъгъла между правите AB и CD.

57) Пресметнете  $\int (6-2x)^{2012} dx$ .

58) Решете системата

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = \mu \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

59) Дадени са точките  $A(1,2,-1)$ ;  $B(-1,3,3)$ ;  $C(1,-1,1)$ ;  $D(1,1,4)$  с координатите си в ортогонална система.

а) напишете уравнението на равнината  $ACD$ .

б) пресметнете координатите на точката, симетрична на  $B$  относно равнината  $ACD$ .

60) Кои са точките на сгъстяване на редицата с общ член  $a_n = \sin \frac{n\pi}{6}$ ?

61) Дадени са матрицата  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  и функцията  $\varphi(x) = x^3 - 6x + 4$ .

а) пресметнете  $\varphi(A)$ ,

б) докажете, че  $\varphi(A) = (A - 2E)(A - (\sqrt{3} - 1)E)(A + (1 + \sqrt{3})E)$ , където  $E$  е единичната матрица.

62) Дадени са точките  $A(1,2,0)$ ;  $B(3,0,3)$  и  $C(4,-2,6)$  с координатите си в ортогонална система.

а) докажете, че  $A, B$  и  $C$  не са разположени върху една права.

б) пресметнете координатите на векторите  $\vec{x}$ , определени от условията:

$\vec{x} \perp \overrightarrow{AB}$ ;  $\vec{x} \perp \overrightarrow{AC}$  и  $|\vec{x}| = 2$ .

63) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2 \right)$  ( $a > 0$ ).

64) Решете уравнението  $(2A - 3E)X = 3A - 2E$ , където  $E$  е единичната матрица, и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

65) Дадени са точките  $A(0,2,1)$ ;  $B(1,3,0)$  и  $C(3,5,-2)$  с координатите си в ортогонална система.

а) докажете, че  $A, B$  и  $C$  са разположени върху една права.

б) пресметнете координатите на точката, симетрична на точката  $O(0,0,0)$  относно правата  $ABC$ .

66) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sqrt{1 + \sin x \cos x}$ .

67) Дадени са матриците  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Пресметнете сумата

$A^n + B^n$  за  $n=1,2,3,\dots$  и изобщо за всяко или (ако ви е трудно) за възможно най-голямата стойност на  $n$ .

68) Дадени са точките  $A(1,2,0)$ ;  $B(3,0,1)$  и  $C(5,-2,6)$  с координатите си в ортогонална система.

а) Пресметнете лицето на триъгълника  $ABC$ ,

б) пресметнете координатите на ортоцентъра на триъгълника  $ABC$ .

69) Пресметнете първите няколко производни на функцията

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right). \text{ (Достатъчно е да се пресметне } f'(x),$$

но няма да е зле да пресметнат и няколко производни от по – висок ред.)

70) Дадени са матриците  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Пресметнете

сумата  $A^n + B^n$  за  $n=1,2,3,\dots$  и изобщо за всяко или (ако ви е трудно) за възможно най – голямата стойност на  $n$ .

71) Дадени са точките  $A(1,2,0)$ ;  $B(3,0,1)$  и  $C(5,-2,5)$  с координатите си в ортогонална система.

а) Пресметнете тангенса на  $\sphericalangle BAC$ .

б) пресметнете координатите на центъра на описаната окръжност на триъгълника  $ABC$ .

72) Пресметнете първите няколко производни на функцията

$$f(x) = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arctg} a^{-x}. \text{ Достатъчно е да се пресметне } f'(x), \text{ но няма}$$

да е зле да пресметнат и няколко производни от по – висок ред.

73) Дадени са матриците  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ . Вярно ли е, че

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

74) Дадени са точките  $A(0,2,0)$ ;  $B(3,0,0)$  и  $C(5,-2,5)$  с координатите си в ортогонална система.

а) Пресметнете котангенса на  $\sphericalangle BAC$ .

б) пресметнете координатите на симетричната на  $D(2,1,1)$  точка спрямо равнината на триъгълника  $ABC$ .

75) Пресметнете  $f'(0)$ , ако  $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ , за която стойност на  $n$  това (според вас) е възможно.

76) Решете системата Пресметнете рангът  $r_A(\lambda)$  на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ като функция на } \lambda.$$

77) Дадени са точките  $A(0,2,0)$ ;  $B(3,0,0)$  и  $C(5,-2,5)$  с координатите си в ортогонална система.



- а) Пресметнете котангенса на  $\triangle BAC$  .  
 б) пресметнете координатите на центъра на вписаната окръжност на триъгълника ABC.

78) Пресметнете  $f'(0)$ , ако  $f(x) = xe^x e^{2x} e^{3x} e^{4x} e^{5x} e^{6x}$  .

79) Дадени са матриците  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- а) Да се изрази явно матрицата  $A+3E$ , където  $E$  е единичната матрица  
 б) Решете уравнението  $(A+3E)X=BX+C$ , където  $X$  е неизвестната матрица.

80) Дадени са точките A(0,2); B(3,0) и C(5,-2) с координатите си в ортогонална система.

- а) Пресметнете котангенса на  $\triangle BAC$  .  
 б) Пресметнете координатите на медицентъра на на триъгълника ABC.

81) Пресметнете  $\int \frac{\ln \arctan x}{1+x^2} dx$  .

82) Дадени са матриците  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ .

- а) Да се изрази явно матрицата  $A+3E$ , където  $E$  е единичната матрица,  
 б) решете уравнението  $(A+3E)X=B$ , където  $X$  е неизвестната матрица.

83) Дадени са точките A(0,2); B(3,6) и C(3,-2) с координатите си в ортогонална система.

- а) Пресметнете котангенса на  $\triangle BAC$  .  
 б) пресметнете координатите на центъра на вписаната окръжност на триъгълника ABC.

84) Пресметнете  $F'(x)$ , ако  $F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1-x & x & 3 \\ -2+x & -3 & x+1 \end{vmatrix}$ .

85) Дадени са матриците  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- а) Да се изрази явно матрицата  $A-E$ , където  $E$  е единичната матрица.  
 б) Решете уравнението  $(A+3E)X=BX+E$ , където  $X$  е неизвестната матрица.

86) Дадени са точките A(0,2); B(3,0) и C(5,-2) с координатите си в ортогонална система.

- а) Пресметнете тангенсът на  $\triangle BAC$  .  
 б) пресметнете координатите на медицентъра на на триъгълника ABC.

87) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+ax}{1+bx} \right)^{\frac{1}{(a+b)x}}$ ;  $a+b \neq 0$ .

88) Решете уравнението  $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

89) Дадени са точките  $A(1,2)$ ;  $B(3,-1)$  и  $C(5,-2)$  с координатите си в ортогонална система.

а) Пресметнете синуса на  $\sphericalangle BAC$ ,

б) пресметнете дължината на вътрешната ъглополовяща през върха  $A$ .

90) Пресметнете  $F'(x)$ , ако  $F(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \frac{1}{x} & x^2 \\ \cos x & -\frac{1}{x^2} & 2x \\ -\sin x & \frac{2}{x^3} & 2 \end{vmatrix}$ .

91) Дадена е матрицата  $B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ t & t & 1 \end{pmatrix}$  и функцията  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ .

Решете уравнението  $f(B(t)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

92) Дадени са точките  $A(1,2)$ ;  $B(3,-1)$  и  $C(5,-2)$  с координатите си в ортогонална система и маси  $A(1)$ ,  $B(-2)$  и  $C(3)$ .

а) Пресметнете координатите на центъра на тежестта  $T$  на тази система материални точки.

б) пресметнете дължината на отсечката  $AT$ .

93) Пресметнете  $F'(x)$ , ако  $F(x) = \begin{vmatrix} \sin x & x & x^2 & x^3 \\ \cos x & 1 & 2x & 3x^2 \\ -\sin x & 0 & 2 & 6x \\ -\cos x & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ .

94) Решете системата  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ .

95) Дадени са точките  $A(1,2)$ ;  $B(3,-1)$  и  $C(5,-2)$  с координатите си в ортогонална система и маси  $A(1)$ ,  $B(2)$  и  $C(-3)$ .

а) Пресметнете координатите на центъра на тежестта  $T$  на тази система материални точки.

б) пресметнете дължината на отсечката  $AT$ .

96) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[x]{a} - 1)$ ;  $a > 0$ .

97) Пресметнете рангът на матрицата 
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & -7 & -2 & -7 & -2 \\ 3 & 10 & 7 & 19 & 8 \end{pmatrix}.$$

98) Дадени са точките  $A(1,2,3)$ ;  $B(3,-1,2)$  и  $C(5,-2,0)$  с координатите си в ортогонална система и маси  $A(2)$ ,  $B(-2)$  и  $C(3)$ .

а) Пресметнете координатите на центъра на тежестта  $T$  на тази система материални точки.

б) пресметнете дължината на отсечката  $AT$ .

99) Пресметнете  $F'(x)$ , ако  $F(x) = \begin{vmatrix} e^x & x & x^2 & x^3 \\ e^x & 1 & 2x & 3x^2 \\ e^x & 0 & 2 & 6x \\ e^x & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$

100) Намерете всички матрици  $X$ , за които  $AX=XA$ , ако  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

101) Дадени са точките  $A, B, C$  и  $D$ , чиито радиус – вектори са съответно  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и  $\vec{d}$ . Докажете, че те са разположени в една равнина тогава и само тогава, когато съществуват четири числа  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  (поне едното от които не е нула) такива, че  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$  и  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ .

102) Пресметнете първата производна на функцията  $f(x) = e^{m \arcsin x} (\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)).$

103) Дадени са точките  $A(1,2,3)$ ,  $B(3,3,5)$ ,  $C(-1,4,4)$  и  $D(2,4,1)$ .

а) Докажете, че те не са компланарни.

б) Пресметнете обемът на пирамидата  $ABCD$  и радиусаът на описаната около  $ABCD$  сфера.

104) Пресметнете  $A^{-1}$ , ако  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  и избощо (ако,

разбира се можете)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ , където  $A$  е квадратна матрица от

ред  $n$ .

105) Пресметнете първата (може и втората или от по – висок ред) производна на функцията  $f(x) = \arcsin\left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$ .

106) Решете матричното уравнение  $BX=A$ , където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \frac{1}{4}A^3 + \frac{1}{2}A^2 + E$$

107) Дадени са точките  $A(1,2,3)$ ;  $B(-5,3, 3)$ ;  $C(5,1,1)$ ;  $D(0,1,4)$  с координатите си в ортогонална система.

а) напишете уравнението на външата ъглополовяща на  $\sphericalangle ACD$ .

б) пресметнете тангенсът на двустенния ъгъл между равнините  $ABC$  и  $BCD$ .

108) Пресметнете границата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{2}{n^2 + 2^2} + \frac{3}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{k}{n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

109) Решете уравнението  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

110) Дадени са точките  $A(1,2,-1)$ ;  $B(-1,3, 3)$ ;  $C(1,-1,1)$ ;  $D(1,1,4)$  с координатите си в ортогонална система.

а) напишете уравненията на правите  $AC$  и  $BD$ .

б) напишете уравненията на трансверзалата на  $AC$  и  $BD$ , която преминава през центъра  $M$  на тежестта на точките  $A, B, C$  и  $D$ , ако те имат еднакви маси.

111) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x \sin x)^{\frac{1}{2x^2}}$ .

112) Открийте всички матрици  $B$ , за които  $AB=BA$ , ако  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

113) Нарисувайте произволен триъгълник  $A, B, C$ . Изобразете след това точката  $T$  от равнината на триъгълника, ако барицентричните координати на  $T$  са равни на

а)  $(1,2,3)$  и

б) (1,-2,3).

114) Пресметнете границата  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{(\pi-x)^2} - 1}{1 - \cos 4x}$ .

115) Пресметнете  $AB-BA$ , ако  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

116) Дадени са точките  $A(1,2,-1)$ ;  $B(-1,3,3)$ ;  $C(1,-1,1)$ ;  $D(1,1,4)$  с координатите си в ортогонална система.

а) напишете уравнението на равнината  $ACD$ .

б) Нарисувайте точката, чиито барицентрични координати спрямо триъгълната пирамида  $A,B,C, D$  са  $(1,-2,3,0)$ .

117) Пресметнете интегралът  $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$ .

118) Дадена е матрицата  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  и функцията  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ .

Пресметнете  $f(A)$  и докажете, че  $f(A) = (A-2E)(A-3E)$ .

119) Решете уравнението с две неизвестни

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & y & 2 & 3 \\ 1 & 2 & y & 3 \\ 1 & 2 & 3 & y \end{vmatrix} = 0.$$

120) Пресметнете интегралът  $\int_0^1 (x - x^2) e^{-x} dx$ .

121) Пресметнете всички стойности на  $\sqrt[3]{1+i}$ .

122) Дадени са точките  $A(1,2,1)$ ;  $B(3,-1,1)$ ,  $C(5,-2,1)$  и  $D(0,0,3)$  с координатите си в ортогонална система.

а) Пресметнете синусът на двустенният ъгъл между равнините  $ABC$  и  $BCD$ .

б) напишете уравненията на трансверзалата между кръстосаните прави  $AB$  и  $CD$ , която минава през точката  $O(0,1,0)$ .

123) Пресметнете  $f'(0)$ , ако  $f(x) = x(x^2 + 1)(1 + \cos x)(1 + e^x)$ .

124) Пресметнете

а) сумата  $1 + 2 \cos x + 4 \cos 2x + 8 \cos 3x + 16 \cos 4x$  и

б) степента  $(12 + 16i)^{2015}$ .

125) Дадени са точките  $A(1,2,1)$ ;  $B(3,-1,1)$ ,  $C(5,-2,1)$  и  $D(0,0,3)$  с координатите си в ортогонална система.

- а) Пресметнете синусът на двустенният ъгъл между равнините ABC и BCD.  
б) напишете уравненията на трансверзалата между кръстосаните прави AB и CD, която минава през точката O(0,1,0).

126) Пресметнете  $f'(0)$ , ако

$$f(x) = x \left( 1 + \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) (1 + \cos x) (1 + e^x) (1 + x^{2012}).$$